By Dr. Farzad Hamidi اثر: دکتر فرزاد حمیدی
November 2000

# تحلیلی نو، بر پارادوکس راسل و پیوستار
# همراه با معرفی یک هندسه جدید
# A New Analysis on Russell's Paradox and Continuum with an Introduction to a New Geometry

فهرست عناوین — شماره صفحه

مقدمه نویسنده ۲
فصل اول: پارادوکس راسل Russell's Paradox و گامی بسوی رفع آن. ۲
تاریخچه پارادوکس راسل ۲
پارادوکس راسل ۲
تئوری طبقات راسل ۳
راه حل ویتگنشتاین ۳
وحدت موضوعی ساختاری ۴
شبیه سازی موضوعی ۵
تئوری حوزه های تعریفی ۵
تئوری صورت ترکیبی ۸
∅ به عنوان صورت ترکیبی مجموعه راسل ۱۰
رابطه مجموعه راسل و صورت ترکیبی آن ۱۰
جمع بندی تئوری صورت ترکیبی ۱۱
وضعیت بینابینی ۱۲
وضعیت بینابینی و صورت ترکیبی ۱۳
مجموعه متجلی ۱۴
مجموعه راسل و اشکال بی نهایت ۱۶
روش ساختگرایانه درمجموعه راسل ۱۶

فصل دوم: پیوستار Continuum و مسئله عدد اصلی آن ۱۶
مقدمه ۱۶
برهان کانتور برای ناشمارایی R ۱۷
چالش با برهان کانتور ۱۸
چالش با برهان دوم ناشمارایی R ۲۶
( نقض اصل موضوع ددکیند)
روش پاره خطهای مجزا برای شمارش R ۲۸
تحلیل تابع ساخت ۲۹
قضیه کانتور و پیوستار ۳۱
چالش با قضیه کانتور ۳۲
نفی فرض پیوستار Continuum hypothesis ۳۴

فصل سوم: عدد اصلی Cardinal number و مجموعه مرجع ۳۴
مقدمه ۳۴
عدد اصلی طبقاتی ۳۵
عدد اصلی مُتعاطی ۳۶

فصل چهارم: جستاری درمجموعه ها ۳۷
بحثی درباره اشتراک یک رده تهی ۳۷
ابهام کلیت درمجموعه ها ۳۹
اعدادی درفواصل بی نهایت کوچک ۳۹
بررسی یک پرسش متناقض ۳۹

فصل پنجم: معرفی یک هندسه جدید( An Introduction to a New Geometry ( March 1999 ۴۱
مختصری از هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی ۴۱
مدخل ۴۲
اصل موضوع سرشتنمای هندسه جدید ۴۳
اصل موضوع جدید توازی ۴۶
فهرست منابع ۵۰

## مقدمه نویسنده

این اثرحاصل دو سال و نیم، تلاش و تفکر است. در تمامی فصول این کتاب، ابداعات و ابتکارات خود را درباب مسائل آن عرضه نموده ام، ازجمله می توان به روشن ساختن ابعاد مختلف پارادوکس راسل درنظریه مجموعه ها و ارائه روشهایی نو برای ازمیان برداشتن آن، نشان دادن تردیدهایی درتعیین عدد اصلی پیوستار، نفی فرض پیوستار، بحثی جدید تحت عنوان« اعداد اصلی مُتعاطی»، ارائه اصول موضوعه ای برای یک هندسه جدید و همچنین طرح یک اصل موضوع جدید برای توازی که ایده اولیه آن
در۱۳۷۸/۱۲/۲۷( مارس ۱۹۹۹ میلادی / March 1999 ) به ذهنم خطور کرد، اشاره نمود. این مطالب تاکنون در هیچ کتاب و مقاله ای مطرح نشده اند.
آنچه دراین اثر به عنوان عنصری وحدت بخش به چشم می خورد، درگیری با مفهوم پیچیده ی بی نهایت ریاضی است که به صورتهای مختلف خود را ظاهر می کند.
امید است این اثر مورد توجه ریاضیدانان و منطق پژوهان واقع شود.§

دکترفرزاد حمیدی
ایران IRAN / تهران Tehran
۲۹ آبان ۱۳۷۹ شمسی / November 2000

# فصل ا ول: پارادوکس راسل و گامی بسوی رفع آن.

## تاریخچه پارادوکس راسل

برتراند راسل Bertrand Russell (۱۹۷۰- ۱۸۷۲) فیلسوف و ریاضیدان برجسته انگلیسی، درسال ۱۹۰۱ پارادوکس paradox خود را در منطق مجموعه ها کشف کرد و آن را در کتاب« اصول ریاضیات» The principles of mathematics ارائه داد.
دراین کتاب راسل در پی مسئله مبانی ریاضیات بود و درآنجا عدد را برمبنای مجموعه ها تعریف میکرد. سرچشمه این تحویل به فرگه Frege (۱۹۲۵- ۱۸۴۸) منطقدان آلمانی بازمی گردد که برای اولین بار اعداد را به مجموعه ها احاله کرد و برای کارخود این فرض را بدیهی گرفت که در ازای هرشرطی که شما درباره چیزها بکنید، مجموعه ای از همان چیزها هست که آن شرط درموردشان صدق می کند.
راسل این پارادوکس را به فرگه نشان داد و فرگه اظهار داشت که این پارادوکس بنیاد حساب را متزلزل کرده است. این پارادوکس بویژه برای فرگه ضربه خرد کننده ای بود، زیرا فرگه جلد سوم ازکتاب قوانین بنیادی علم حساب را براثراین پارادوکس هرگز ننوشت.
حتی فرگه پاسخی را برای آن فراهم ساخت، اما اندکی پس ازمرگش یک منطقدان لهستانی بنام لسنی یفسکی Lesniewski ثابت کرد که این پاسخ درست نیست و گمان میرود که حتی خود فرگه هم به این امر پی برده باشد.
اززمان پدید آمدن نظریه مجموعه ها توسط کانتور Georg Cantor ( ۱۹۱۸- ۱۸۴۵) تا کشف راسل، وجود مجموعه ی تمام مجموعه ها یا مجموعه جهانی مطلق، امری مسلم فرض می شد. راسل نشان داد که قبول وجود چنین مجموعه ای به تناقض منجر می شود و بنابراین، مجموعه تمام مجموعه ها نمی تواند وجود داشته باشد. این تعارض، جهان ریاضی را به لرزه انداخت.
کمی بعد ازانتشار پارادوکس راسل، پارادوکس های بسیاری در نظریه مجموعه ها ساخته شد. نتیجه این شد که برخی از واژه های این نظریه مانند مجموعه وعضو یک مجموعه به عنوان امور تعریف نشده و اولیه پذیرفته شود و تعدادی اصول موضوع برای آن طرح گردد تا پارادوکسی درآن رخ ندهد.
درواقع درنظریه اصل موضوعی مجموعه ها به این مسئله پرداخته می شود که با ارائه اصولی از بروز پارادوکس ها درآن ممانعت به عمل آید.
هم اکنون حاصل چنین کاری، نظریه مجموعه های کلاسیک که همگی با آن آشنا هستیم و نظریه های غیرکلاسیک مجموعه ها شده است.
با این حال تا به امروز کسی موفق نشده است یک سیستم اصل موضوعی مطلوب را برای این نظریه ارائه دهد و با این همه، نظریه کانتور امروزه در پایه گذاری آنالیز مدرن و توپولوژی اهمیت خاصی دارد.
راسل کوشید با طرح تئوری طبقات theory of types این پارادوکس را برطرف سازد.
مطابق این تئوری، محال- یعنی بی معنا- بود که کسی بگوید طبقه یا مجموعه ای عضو خودش هست یا نیست. عده ای با این تئوری قانع نشده اند وبه نظر می رسد راههای مختلفی برای از میان برداشتن آن وجود دارد.
درگیری با این پارادوکس، ما را هرچه بیشتر با پیچیدگی هایی که مبانی ریاضیات برآن استوارند، روبرو می سازد. همچنین باید به خاطرداشت که گاهی پارادوکس ها الهام بخش هستند و زمینه های نوینی را پیش روی ما قرارمی دهند واکتشافات مهمی را به بارمی آورند.
و. و. کواین Willard. V. Quine فیلسوف و منطقدان برجسته آمریکایی امیدوار است که« آنقدرازاین دستگاه [ یعنی ریاضیات محض] زده شود که به ضعیف ترین و طبیعی ترین مجموعه مفروضاتش برسد، یعنی فرض هایی که هنوزشالوده کافی برای کاربردهای علمی فراهم کنند؛ و یکی ازآثاراین تقلیل به حداقل، راه حلی طبیعی تر و قطعی تر از راه حل فعلی برای قضایای جدلی الطرفین درنظریه مجموعه ها مانند پارادوکس راسل باشد.»
در این فصل، ابتداء به شرح پارادوکس راسل می پردازیم، سپس راه حل راسل و ویتگنشتاین برای آن را توضیح می دهیم. دربخش آخر با تحلیل ها و دیدگاههای جدیدی به مصاف آن می رویم که تاکنون سابقه نداشته اند و برای اولین بار ارائه می شوند.

## پارادوکس راسل

درنظریه مجموعه ها، وجود مجموعه همه مجموعه ها **U** ( مجموعه جهانی) امری مسلم فرض می شود. راسل به این فکرافتاد که مجموعه ها را به دو دسته تقسیم کند: مجموعه هایی که عضو خودشان نیستند مانند مجموعه انسانها که خودش انسان نیست و مجموعه هایی که عضوخودشان هستند. حال مجموعه همه مجموعه هایی را که عضوی ازخود نیستند، درنظرمی گیریم.

این مجموعه را A می نامیم. به این ترتیب $A = \{ F\in U \mid F\notin F \}$ . اکنون این سؤال مطرح می شود که آیا این مجموعه عضو خودش هست یا نیست. دو حکم زیر را بررسی می کنیم.( مجموعه A را « مجموعه راسل» می نامیم.)

۱) حکم $A\notin A$ - برهان: فرض کنیم $A\in A$ باشد. ازآنجا که هرعضو از A یک مجموعه است که عضو خودش نیست، بنابراین ازعضویت A در A نتیجه می شود که A مجموعه ای است که عضو خودش نیست یعنی $A\notin A$. اما این برخلاف فرض است، پس $A\notin A$ و حکم برقرار است.

۲) حکم $A\in A$ - برهان: فرض کنیم $A\notin A$ باشد. چون A همه مجموعه هایی را که عضو خود نیستند، دربردارد و ازطرف دیگر $A\in U$ است، پس نتیجه می شود که $A\in A$. اما این برخلاف فرض است، پس $A\in A$ و حکم برقرار است.

ازاین دو برهان نتیجه می شود که مجموعه همه مجموعه ها وجود ندارد، زیرا وجود آن منجربه تناقض« $A\notin A$ و $A\in A$ » درباره مجموعه A از U می شود.

## تئوری طبقات راسل

راسل این تئوری را برای جلوگیری از پیش آمدن پارادوکس درکتاب اصول ریاضیات خود ارائه داد. راسل این موضوع را مطرح می کند که هر عضو از یک مجموعه براساس خاصه یا شروطی که با یک تابع گزاره ای بیان می شود، درآن مجموعه قرار می گیرد.

به ازای برخی ازمقادیر، تابع گزاره ای propositional function به گزاره ای صادق بدل می شود و به ازای برخی ازمقادیر، گزاره حاصله کاذب است.

سلسله مقادیری که تابع گزاره ای درآنها یک گزاره صادق است، حوزه صدق range of truth نامیده می شود.

از طرف دیگر، مقادیری هم هست که درآنها گزاره حاصله ، نه صادق است و نه کاذب، بلکه بی معنی است واصولاً خاصه مربوطه، برآنها قابل اطلاق نیست.

سلسله مقادیری که تابع گزاره ای را به گزاره ای معنی دار بدل می کنند و درنتیجه درباره صدق یا کذب آن می توان حکم نمود، حوزه اطلاق range of significance را تشکیل می دهند.

به این ترتیب، راسل برای هرتابع گزاره ای، دو حوزه صدق واطلاق قائل می شود.

برای مثال، درتابع گزاره ای« x ناطق است.» اگر به جای x سقراط قرار گیرد، گزاره « سقراط ناطق است.» صادق است. اما اگر به جای x ، مجموعه انسانها گذاشته شود، گزاره « مجموعه انسانها ناطق است.» بی معنی است؛ زیرا مجموعه انسانها، انسان یا عینی نیست که ناطق بودن یا نفی آن به نحو معنی داری برآن قابل اطلاق باشد واصولاً درحوزه اطلاق این تابع گزاره ای نیست.

مجموعه انسانها نه انسان است و نه می تواند انسان باشد تا ناطق شود، درنتیجه مجموعه انسانها عضو خودش نیست و نمی توان درباره عضو خود بودن یا نبودن آن سخنی گفت و چنین سخنی فاقد معناست.

به این ترتیب، این مسئله که یک مجموعه عضوی ازخودش باشد، درحوزه اطلاق تابع گزاره ای مربوط به آن نیست و بی معنی است.

بطورخلاصه، مجموعه اشیاء، خود یک شیء نیست. برای مثال، یک تیم فوتبال مجموعه ای ازافراد است که این مجموعه نمی تواند عضوی از اعضاء خود باشد ولی می تواند عضو مجموعه ای از طبقه دیگر مانند مجموعه تیم های فوتبال یک شهرکه مجموعه ای ازمجموعه هاست، باشد.

این دومجموعه ازدوطبقه متفاوتند و توجه به تفاوت میان طبقات، مانع از بروز پارادوکس می شود.

بنابراین، مجموعه همه مجموعه ها وجود ندارد و تنها سلسله طبقات مجموعه ها وجود دارد و این سلسله حد و مرزی ندارد.

راسل درابتداء تفاوت بین طبقات را تفاوت میان طبقات موجودات درنظرمی گرفت. بعد ازمدتی، درکتاب « مبانی ریاضیات» Principia Mathematica این نکته را مطرح کرد که نمادهای نشان دهنده مجموعه ها، تعریف، کاربردها و نقش معینی دارند ولی خود آنها فی نفسه فاقد دلالتند و موجوداتی مابازاء آنها وجود ندارند وصرفاً شیوه هایی برای اشاره به سایر موجودات اند.

خود مجموعه ها هیچ معنایی ندارند؛ مجموعه ها تعبیه های نمادین یا زبانشناختی هستند و نمادهای ناقص اند. او این ایده را « لغو مجموعه ها abolition of classes » می نامد.

پس ازاین نکته، راسل به تفسیر زبانشناختی تئوری طبقات روی می آورد واینک تفاوتهای بین طبقات را تفاوت میان توابع نحوی درنظرمی گیرد. بعبارت دیگر، تفاوتها بین طبقات مختلف نمادهاست که وضع طبقه ای شان را قواعد نحوی حاکم برآنها معین می کنند.

راسل، علاوه براین، ازتئوری طبقات در مواجهه با چند مسئله فلسفی نیز سود می جوید و براساس این تئوری به آنها پاسخ می دهد.

## راه حل ویتگنشتاین

ویتگنشتاین Wittgenstein ( ۱۹۵۱ - ۱۸۸۹) در رساله منطقی- فلسفی Tractatus logico-philosophicus راه حلی را برای پارادوکس راسل ارائه می دهد. این راه حل در گزاره های 3.33 تا 3.333 از رساله بیان شده است. راه حل وی چنین است:

« در نحو منطقی، نشانگری( دلالت) یک نشانه هرگز نباید نقشی بازی کند، نحو منطقی باید بتواند برقرار شود، بی آنکه بدان راه از نشانگری یک نشانه سخنی رود. نحو منطقی باید فقط توصیف عبارتها را در پیش فرض کند.

ازاین ملاحظه، به « نظریه ی نوع ها theory of types » ی راسل رجوع می کنیم. مشاهده می شود که: اشتباه راسل دراین امرخود را نشان می دهد که او در برقرار ساختن قاعده های نشانه های خود، ناگزیر بوده است از نشانگری نشانه ها سخن گوید. هیچ گزاره ای نمی تواند چیزی درباره ی خود اظهار کند، زیرا گزاره - نشانه نمی تواند در خود گنجانیده باشد،( این است سراسر« نظریه نوع ها»).

یک تابع ... نمی تواند شناسه ی خاص خود باشد ... و نمی تواند خود را در خود بگنجاند.

برای مثال فرض کنیم که تابع $F( fx )$ بتواند شناسه ی خاص خود باشد، پس بنابراین گزاره ای یافته می شود که چنین است: $F( F( fx ))$ ؛ و دراین گزاره می باید تابع بیرونی F و تابع درونی F نشانگریهایی متفاوت داشته باشند، زیرا تابع درونی این صورت را دارد: $\varphi ( fx )$ و تابع بیرونی، صورت زیر را: $\psi ( \varphi ( fx ))$.

هر دو تابع فقط حرف F را میان خود مشترک دارند، حرفی که بتنهایی هیچ چیز را مشخص نمی کند ...

بدینسان پارادوکس راسل ازمیان برداشته می شود.» [ برگرفته از رساله منطقی- فلسفی با ترجمه دکتر میرشمس الدین ادیب سلطانی]

چنانچه ملاحظه می شود، ویتگنشتاین با تئوری- طبقات یا- نوع های راسل همدلی ندارد و پارادوکس راسل را به این طریق ازمیان برمیدارد که، مجموعه همه مجموعه هایی که عضوی از خود نیستند، امری را نشانگری می کند که نمی تواند چیزی درباره ی خود اظهار کند و نمی تواند خود را در خود بگنجاند.
وی تئوری نوع ها یا طبقات راسل را به این سبب که از نشانگری نشانه ها سخن می گوید، نفی می کند؛ زیرا بنظر وی، « نحو منطقی باید بتواند برقرار شود، بی آنکه بدان راه از نشانگری یک نشانه سخنی رود.»

اساساً راسل و ویتگنشتاین ( منظور، نظرات وی در رساله منطقی- فلسفی است، زیرا وی بعداً نظرات خود را تغییر داد.) در مورد وجود سلسله مراتب زبانها hierarchy of languages با هم اختلاف دارند:
ویتگنشتاین معتقد است، نمی توان در درون هر زبان، راجع به ساختارآن زبان سخن گفت. ولی راسل با فرض سلسله مراتب زبانها، معتقد است که اگر کسی نتواند در داخل یک زبان درباره ی ساختار آن بگوید، می تواند آن را در درون زبان دیگری( زبان مرتبه دوم) ، بیان کند؛ که هر دو زبان به طبقات مختلف تعلق دارند.
ویتگنشتاین نظرش را شامل تمام زبانها می داند، اما راسل بر مبنای تئوری طبقات خود، معتقد است که چیزی بنام کل زبانها وجود ندارد و به جای آن سلسله مراتبی از زبانها( بدون حد فوقانی) وجود دارد.

****

دراین بخش ازطریق تحلیل های متفاوتی تلاش می شود تا راه حلی برای پارادوکس راسل ارائه داده شود. هرتحلیل بایستی بطورجداگانه مدنظر قرار گیرد.

## وحدت موضوعی ساختاری

اعضاء مجموعه راسل A از وحدت موضوعی برخوردارند که این وحدت موضوع عبارت است از: عضوی ازخود نبودن.
مجموعه A هم، عضوی ازخود نیست و این وحدت موضوع شامل آن می شود، اما این به معنی قرارگرفتن(عضویت) A درخودش نیست.
این امرعین خود مجموعه A است.
جهت روشن شدن چگونگی شمول این وحدت موضوع درمورد A مثالی را مطرح می کنیم:
فرض کنید من دراتاقی نشسته ام ومجموعه اشیاء واقع دراتاق را درنظرمی گیرم. اگرمیزی جزء اشیاء این اتاق باشد پس عضوی ازمجموعه مورد نظرخواهد بود. موضوع هرعضوازاین مجموعه « شیء واقع دراین اتاق» است.
سؤال این است: آیا« دراین اتاق بودن میز» هم شیئی واقع دراین اتاق است؟ پاسخ این است که دراین اتاق بودن میز یک شیء واقع دراتاق نیست؛ دراین اتاق بودن میزعین خود آن است.
« دراین اتاق بودن میز» با عینیت میز درآمیخته است و به این ترتیب وحدت موضوعی درمورد آن هم به نوعی صادق است، اما به معنی جدایی « دراین اتاق بودن میز» ازعین میز وعضویت آن درمجموعه مورد نظر نیست.
A مشمول وحدت موضوعی ساختار مجموعه A است، اما این شمول به معنی عضویت A درخودش نیست. شمول وحدت موضوعی درمورد A با عینیت A مرتبط است. در تئوری وحدت موضوعی ساختاری، اعضاء هرمجموعه ای براساس موضوعی واحد به عضویت آن درآمده اند و هرعضو یک محمول predicate ازآن مجموعه محسوب می شود.
درباره مجموعه A با این مسئله مواجهیم که آیا وحدت موضوعی اعضاء A درمورد خود مجموعه A نیز صادق است؟ و اگر بله، آیا مجموعه A می تواند محمول خودش واقع شود؟
با قبول این تئوری، اگر مجموعه A مشمول وحدت موضوعی اعضاء خود نباشد یعنی بر مجموعه A عضوی ازخود نبودن صدق نکند، آنگاه A مجموعه ای است که عضوی از خود است و این عضو که همان مجموعه A است به این ترتیب مشمول وحدت موضوعی اعضاء شده است و این تناقض است.
در این تئوری، وحدت موضوعی اعضاء در مورد خود مجموعه A صادق است، اما این شمول عین A است و لذا عضوی از خود نبودن آن، محمول خودش واقع نمی شود.
برای بررسی دقیق تر مطلب به تحلیل گزاره « میز، میزاست.» می پردازیم که ارتباط نزدیکی با موضوع دارد.
دراین گزاره، میز دوم بر میز بودن کلمه اول صحه می گذارد: در اینجا فرض براین است که میز مشخصی مد نظراست، درغیراینصورت گزاره مورد نظر، بیان همانیّت میزاست. با فرض میز معینی، به این میزمی توان محمول هایی را نسبت داد مانند: شکل و فرم، جنس، اندازه و ...
مجموعه تمامی محمول های قابل انتساب به میز را درنظر می گیریم. موضوع subject هریک ازاین محمول ها میزاست. وحدت موضوعی محمول های میز، میز بودن است. هر یک ازاین محمول ها جدای ازآن میزمعین، موضوع مندی خود را از دست می دهند.
حاصل وحدت مندی محمول های میز در دستگاه ادراکی ما، میز است.( البته وحدت محمول ها چیزی بیش ازجمع محمولهاست و درواقع محمولهای *مجزا* به وحدت نمی رسند؛ وحدت محمول ها بیانی نارسا ازاین رویداد است.)
این وحدت محمول ها درادراک ما، تعیّن- بخشی انفرادی هر محمول درجهت موضوعیت یافتن میز را ممکن می سازد، لذا محمولیت هرمحمول جدا از وحدت ادراکی محمول ها ممکن نیست.
اکنون سؤال اساسی این است: آیا درگزاره فوق، میزدوم محمول واقع می شود؟
اگر میز دوم- که دال بر میز بودن کلمه اول است- محمول واقع شود، دچارتناقض می شویم. تناقض چنین است: اگرمیز به عنوان محمول، عضوی از مجموعه تمام مجموعه های میز باشد، وحدت موضوعی هرمحمول شامل آن نیز می شود؛ یعنی موضوع میز به عنوان محمول، میز است، لذا میز بودن بعنوان محمول، متعلق وحدت ادراکی محمول ها واقع می شود.
دراینصورت میز بعنوان محمول فاقد محمول های متعلق دستگاه ادراکی ما است و در وحدت مندی ادراکی نقشی همانند سایر محمول های میز دارد و در نتیجه میز بودن یا همان میز بعنوان محمول درعرض سایر محمول ها قرار می گیرد و ازآنجا که میز حاصل وحدت ادراکی محمول هاست پس شامل همه محمول های منتسب به آن است و نه درعرض آنها.
به این ترتیب، میز به عنوان محمول هم درعرض سایرمحمول هاست و هم شامل همه آنها و این یک تناقض است.

سؤال موازی آن است که موضوع میز بودن چیست؟
اگرموضوع میزبودن، میز باشد، دراین صورت میز بودن نیز یک محمول می شود که متعلق وحدت ادراکی واقع می شود و درعرض سایر محمول ها قرار می گیرد و ازطرف دیگر، میز بودن حاصل وحدت ادراکی است و شامل همه محمول هاست، پس باز هم دچار تناقض می شویم.
ازپاسخ این دو سؤال به این نتیجه می رسیم:
۱) میزبودن میز، عین میزاست و امری جدا ازآن نیست. میزبودن آن، محمول میز نیست بلکه عین یا خود میزاست. خود میزعینیت میزبودن است.
۲) موضوع میزبودن، عین میزی میز است و میزی آن حاصل وحدت ادراکی ماست.
اکنون براساس تئوری وحدت موضوعی ساختاری، درباره پارادوکس راسل درمجموعه A چنین می توان گفت: موضوع هرعضو A عضوی از خود نبودن است. موضوع مجموعه A ، عضوی از خود نبودن است که این موضوع عین A است و درنتیجه مجموعه A محمول خودش نیست و به عضویت خود درنمی آید، همانطور که میزبودن میز یا دراین اتاق بودن میز، عین میز است و محمول آن نیست.
« این تئوری، طبیعی ترین راه حل پارادوکس راسل است.»

یادداشت: مجموعه { ۱,۲,۳,۴} را درنظرمی گیریم. مجموعه ی « مجموعه اعداد فرد و مجموعه اعداد زوج» ازاین مجموعه عبارت است از: B ={{۱,۳ } , {۲,۴ }}. وحدت موضوعی درساختار B چیست؟
پاسخ این است: « مجموعه اعداد فرد یا مجموعه اعداد زوج» بودن.
دراینصورت اگر عضو نامشخصی ازمجموعه B داده شده باشد، نمی توان گفت این عضو« مجموعه اعداد فرد» است یا« مجموعه اعداد زوج». بعبارت دیگر، سخن صریحی درباره این عضو نمی توان گفت.
ملاحظه می شود که درB ، وحدت موضوعی ساختاری امری منفصل است و با « یا» بیان می شود. وحدت موضوعی هرعضو B با عضو دیگر، « مجموعه اعداد فرد یا مجموعه اعداد زوج» است.

## شبیه سازی موضوعی

درتئوری وحدت موضوعی ساختاری دیدیم که عضوی ازخود نبودن مجموعه A، عین A است. بعبارت دیگر، می توان گفت که A عضوی ازخود نبودن را درکلیت خود « می نمایاند.»
مجموعه A ={ x,y,z , ... , A } را درنظرمی گیریم که درآن ... x,y,z, مجموعه هایی هستند که عضوی ازخود نیستند و A مجموعه ای است که درکلیت آن می نمایاند که عضوی ازخود نیست. دراینجا، A عضوی است که ' فراتر' از موضوع هرعضو دیگر ازاین مجموعه، موضوع مند شده است.
اگربرای تعریف عضوی از خود نبودن یک مجموعه شرطهایی وجود داشته باشد، این شرطها برای مجموعه A « کراندار» نیست و تعریف مندی آن تعریفی است چونان کل. موضوع مندی مجموعه A یک « شبیه سازی موضوعی» با مجموعه های x,y,z,... است.
درباره حالت فوق دو نکته وجود دارد:
۱) هرحکمی که درباره مجموعه {x,y,z,...} داده شود، هیچ تغییری در مجموعه ایجاد نمی شود. بعبارت دیگر، هرحکمی صادق است: یعنی این مجموعه هم عضوی ازخود است وهم عضوی ازخود نیست. دلیل این امر چنین است:
الف) اگرحکم به عضوی ازخود نبودن آن داده شود، و با این حکم مجموعه به عضویت خود درآید، این عضو تنها ازطریق شبیه سازی موضوعی به عضویت مجموعه درمی آید، که ازابتداء هم درمجموعه واقع است و درنتیجه تغییری درمجموعه حاصل نمی شود.
ب) اگرحکم به عضوی ازخود بودن آن داده شود، A به عنوان یک عضو تناقضی با این حکم ندارد؛ چون عضوی ازخود نبودن درباره آن، یک نمایانگری درکلیت آن است و لذا تغییری درجهت حذف A به عنوان یک عضو و تغییر حکم صورت نمی گیرد.

چنین وضعیتی برای مجموعه همه مجموعه هایی که عضوی از خود نیستند، مشابه وضعیت یکی ازپارادکس هایی است که در یونان قدیم مطرح شده است:
دیودوروس کرونوس ازفیلسوفان مگارائی Diodorus Cronus of Megara چنین می گفت: « الکترا Electra برادرخود، ارستس Orestes را می شناسد. اما الکترا، ارستس را که نقاب برچهره افکنده و دربرابر او ایستاده است، نمی شناسد. بنابراین، الکترا آنچه را می شناسد، نمی شناسد.»
و به این طریق می خواست نشان دهد که منطق مبتنی براصل امتناع تناقض به نتیجه محال منجر می شود و درجواب سؤال واحد می توان هم نه و هم آری گفت.
۲) وحدت موضوعی ساختاری مجموعه { x,y,z , ... , A } عبارت است از: « عضوی ازخود نبودن یا نمایانگری عضوی ازخود نبودن»
این وحدت موضوعی منفصل موجب می شود که نتوان میان A به عنوان یک عضو با سایراعضاء بطور صریحی تمایزحاصل کرد و شمول این مجموعه براعضایی که عضوی ازخود نیستند و نمایانگری آن، امرصریحی نیست.
یادداشت: A به عنوان یک عضو ازA، عضوی نامتعارف است که فاقد تمایز ثابت ازسایراعضاء است و با عضویت درمجموعه راسل ازهر کرانه ای که متعلق به سایراعضاء مجموعه راسل است، فراتر می رود و با دربرگرفتن این اعضاء، « نهایتاً» با خود مجموعه راسل اینهمان می شود.
به این ترتیب، مصداق extension عضویت این عضو نامتعارف درمجموعه راسل، وضعیتی است که مجموعه راسل به عنوان مجموعه ای که عضوی ازخود است، تبیین می شود و مصداق اینهمانی identity این عضو نامتعارف با خود مجموعه راسل، وضعیتی است که مجموعه راسل به عنوان مجموعه ای که عضوی ازخود نیست، تبیین می شود.

## تئوری حوزه های تعریفی( عدم عملگری تعریف هرعضو A برمجموعه A )

دراینجا، به طریقی دیگر به رفع پارادوکس می پردازیم.

هرعضو ازمجموعه A بصورت مجموعه ای که عضوی ازخود نیست، تعریف شده است. درباره مجموعه A به عضوی ازخود نبودن آن حکم می کنیم: این حکم درباره مجموعه A بیرون از حوزه تعریفی هرعضو از A صادق است، درنتیجه A به دلیل چنین حکمی به عضویت خود در نمی آید.
بعبارت دیگر، درمورد چنین حکمی درباره A، تعریف هرعضو از A عمل نمی کند.
این شیوه برخورد با پارادوکس راسل تا حدودی شبیه به نظر آلفرد تارسکی Alfred Tarski ریاضیدان و منطقدان برجسته ی قرن بیستم، درباره « پارادوکس دروغگو» به سال۱۹۳۰ میلادی است.
جمله « هرچه می گویم، دروغ است.» را درنظر می گیریم. اگراین جمله راست باشد، آنگاه باید دروغ باشد و برعکس. بعبارت دیگر، این جمله درست است، اگرو فقط اگر نادرست باشد!
به نظر تارسکی، این جمله حکمی است که به نادرست بودن خودش حکم می کند؛ آنگاه مدل ریاضی آن را می سازد.
تارسکی برای هرمدل ریاضی دو زبان قائل است: ۱- زبان موضوع. ۲- زبان مافوق آن metalanguage .
احکام به زبان مافوق مربوط هستند و درستی و نادرستی یک حکم به زبان مافوق مربوط است. زبان موضوع، زبانی است که فکر درآن بیان می شود و دراین جمله، زبان موضوع زبانی است که حکم موجود درپارادوکس با آن بیان می شود.
حکم مطرح شده در جمله فوق، تنها احکام بیان شده درزبان موضوع را شامل می شود. درباره حکم موجود درپارادوکس دروغگو، حکمی وجود دارد که حکم مطرح درزبان موضوع برآن شامل نمی شود واین حکم حائز درستی و نادرستی خود است، بدون آنکه تناقضی موجود باشد.
بعبارت دیگر، این حکم در زبان مافوق است.
حکم واقع درزبان مافوق، بیرون ازعملگری حکم واقع درزبان موضوع پارادوکس دروغگو است.

حکم مطرح شده درباره مجموعه A دربالا، تنها یکی ازحالتهای عدم عملگری تعریف هرعضو برمجموعه A است که پارادوکس راسل را ازمیان برمیدارد. سایرحالتهای موجود را پس ازشرح مثال زیر بیان می کنیم. این مثال، مطلب را روشنتر می کند.
مزرعه معینی را درنظرگرفته و مجموعه $C = \{ x \mid x$ ی ازمزرعه که انسان نیست. $\}$ را درباره موجودات واقع درآن مد نظر قرارمی دهیم.
برای هرعضو از C و برای مجموعه C دوحوزه تعریفی جداگانه قائل می شویم. بنابراین، انسان نبودن برای هرعضو ازC متفاوت ازصدق آن درباره مجموعه C است و ازطرف دیگر، صدق انسان بودن برای مجموعه C متفاوت ازتعریف انسان بودن درحوزه تعریفی مختص اعضاء C است.

انسان بودن ← Φ → انسان نبودن        انسان بودن ← Φ → انسان نبودن

حوزه تعریفی مختص مجموعه C        حوزه تعریفی مختص اعضاء C

براین اساس، هریک ازحالتهای زیر پذیرفته شوند، صحیح بوده و تناقضی وجود نخواهد داشت.
۱) به مجموعه C انسان نبودن را نسبت می دهیم و این حکم را درحوزه تعریفی مختص مجموعه C انجام میدهیم. دراین صورت صدق آن متفاوت ازاین امر در حوزه تعریفی مختص اعضاء C است و در نتیجه بدلیل چنین حکمی مجموعه C به عضویت خود درنمی آید. بعبارت دیگر، مجموعه C دراین حالت عضوی ازخود نیست.
۲) درباره مجموعه C درحوزه تعریفی مختص مجموعه C چنین حکم می کنیم: نه انسان بودن و نه انسان نبودن درمورد مجموعه C صدق نمی کند. بعبارت دیگر، مجموعه C دراین حوزه نه عضوی ازخود است ونه عضوی از خود نیست.
دراین حالت برای C دو مقام قائل شده ایم:
الف) C درمقام دربردارنده اعضاء: درحوزه تعریفی مختص مجموعه C، نه عضوی ازخود است و نه عضوی ازخود نیست.
ب) C درمقام عضوی از C: چنین حکمی درحوزه تعریفی مختص اعضاء C، نوعی از انسان نبودن محسوب می شود، زیرا به عنوان« انسان نبودن بطورنامعین» تعبیرمی شود.
انسان نبودن بطورنامعین به این معنی است که C درمقام عضوی ازC انسان نیست، اما بطورمعینی معلوم نیست چه باشد.
درواقع C درمقام عضوی ازC به این علت که درحوزه تعریفی مختص اعضاء C « انسان نیست» محسوب می شود، به عضویت C درمقام دربردارنده درمی آید.

یادداشت: C درمقام عضوی ازC، معین نیست کدامیک ازاعضاء C است. بنابراین، عضویت آن درC درمقام دربردارنده دال برعضوی ازخود بودن بطورمعین برای C درمقام دربردارنده اعضاء نیست.

۳) درباره مجموعه C درحوزه تعریفی مختص مجموعه C چنین حکم می کنیم: انسان بودن برC صدق می کند، بعبارت دیگرC دراین حوزه عضوی ازخود نیست.
دراین حالت C در دو مقام واقع می شود:
الف) C درمقام دربردارنده اعضاء: درحوزه تعریفی مختص مجموعه C، عضوی ازخود نیست.
ب) C درمقام عضوی ازC: حکم انسان بودن همانند تعریف آن درحوزه تعریفی مختص اعضاء C نیست. درحوزه تعریفی مختص اعضاء C این امر، نفی« انسان نبودن بطور نامعین» تعبیر می شود که نوعی دیگراز انسان نبودن محسوب می شود.
نفی« انسان نبودن بطورنامعین» به این معنی است که انسان نبودن امرنامعینی فرض شده ونفی می شود واین نفی، امری بی پایان برای ’ انسان شدن‘ است.

یادداشت: C درمقام عضوی از C دال برعضوی ازخود بودن برای C درمقام دربردارنده نیست( یعنی این که مجموعه C به عنوان انسان بودن به عضویت خود درآمده باشد.) زیرا C درمقام عضوی از C، هرعضو از C را نفی می کند و انسان بودن آن امری برگذرنده ( استعلایی transcendental ) است که پس از نفی بی پایان این اعضاء حاصل می شود.

۴) درباره مجموعه C درحوزه تعریفی مختص مجموعه C چنین حکم می کنیم: انسان نبودن بر C صدق می کند.
دراین حالت C در دو مقام واقع می شود:
الف) C درمقام دربردارنده اعضاء: درحوزه تعریفی مختص مجموعه C، عضوی ازخود است.
ب) C درمقام عضوی از C: حکم انسان نبودن همانند صدق آن درحوزه تعریفی مختص اعضاء C نیست. درحوزه تعریفی مختص اعضاء C، این امرانسان نبودن بطورنامعین تعبیرمی شود که نوعی ازانسان نبودن محسوب می شود.

یادداشت: C درمقام عضوی از C، دال برعضوی ازخود بودن برای C درمقام دربردارنده نیست، زیرا C درمقام عضوی از C معین نیست کدام عضواز C است.

اکنون برای بررسی مجموعه A آماده شده ایم. برای هرعضو از A و برای مجموعه A دوحوزه تعریفی جداگانه درنظرمی گیریم:
حوزه تعریفی مختص اعضاء A و حوزه تعریفی مختص مجموعه A. جدا کردن این دوحوزه تعریفی به رفع پارادوکس منتهی می شود.
به این ترتیب، عضوی ازخود نبودن برای مجموعه A متفاوت ازصدق آن برای هرعضواز A است؛ عضوی ازخود بودن برای مجموعه A متفاوت ازتعریف عضوی ازخود بودن درحوزه تعریفی مختص اعضاء A است.
این دو حوزه تعریفی بر روی هم عملگری ندارند.

عضوی ازخود بودن ← Φ → عضوی ازخود نبودن
حوزه تعریفی مختص مجموعه A

عضوی ازخود بودن ← Φ → عضوی ازخود نبودن
حوزه تعریفی مختص اعضاء A

درباره مجموعه A به بررسی حالتهای زیر می پردازیم که هریک ازآنها پذیرفته شوند، صحیح بوده و پارادوکس ازمیان می رود.

۱) برای مجموعه A درحوزه تعریفی مختص مجموعه A چنین حکم می کنیم: مجموعه A عضوی ازخود نیست. صدق این حکم متفاوت از صدق آن درحوزه تعریفی مختص اعضاء A است و درنتیجه مجموعه A نمی تواند به عضویت خود درآید. این حالت قبلاً نیز توضیح داده شده است.
۲) درباره مجموعه A درحوزه تعریفی مختص مجموعه A چنین حکم می کنیم: نه عضوی ازخود است ونه عضوی ازخود نیست. به این ترتیب، A در دو مقام واقع می شود:
الف) A درمقام دربردارنده اعضاء: درحوزه تعریفی مختص مجموعه A، نه عضوی ازخود است و نه عضوی ازخود نیست.
ب) A درمقام عضوی از A : چنین حکمی درحوزه تعریفی مختص اعضاء A، عضوی ازخود نبودن محسوب می شود، زیرا به عنوان « عضوی ازخود نبودن بطورنامعین» تعبیرمی شود که نوعی ازعضوی ازخود نبودن است. عضوی ازخود نبودن بطورنامعین به این معنی است که برای A درمقام عضوی از A، عضوی از خود بودن صادق نیست و مطلقاً نفی می شود، اما بطورمعینی عضوی ازخود نبودن برآن صادق نیست و عضوی ازخود نبودن آن تعیّن ندارد.
یادداشت: A درمقام عضوی از A، معین نیست کدام عضو از A است و وجود آن تعیّن پذیرنیست.
۳) درباره مجموعه A درحوزه تعریفی مختص مجموعه A چنین حکم می کنیم: A عضوی ازخود است.
دراین حالت A در دو مقام واقع می شود:
الف) A درمقام دربردارنده اعضاء: درحوزه تعریفی مختص مجموعه A، عضوی ازخود است.
ب) A درمقام عضوی از A: حکم عضوی ازخود بودن همانند تعریف آن درحوزه تعریفی مختص اعضاء A نیست. درحوزه تعریفی مختص اعضاء A این امر، نفی« عضوی ازخود نبودن بطورنامعین» تعبیر می شود که نوعی دیگرازعضوی ازخود نبودن محسوب می شود.
نفی« عضوی ازخود نبودن بطورنامعین» به این معنی است که عضوی ازخود نبودن امرنامعینی فرض شده و نفی می شود واین نفی، امری بی پایان برای حصول عضوی ازخود بودن است.
یادداشت: A درمقام یک عضو از A، هرعضو از A را نفی می کند و عضوی ازخود بودن آن امری برگذرنده( استعلایی) است که پس ازنفی بی پایان هرعضو از A حاصل می شود.
۴) درباره A درحوزه تعریفی مختص مجموعه A چنین حکم می کنیم: مجموعه A عضوی ازخود نیست.
دراین حالت A در دو مقام واقع می شود:
الف) A درمقام دربردارنده اعضاء: درحوزه تعریفی مختص مجموعه A، عضوی ازخود نیست.
ب) A درمقام عضوی از A : حکم عضوی ازخود نبودن همانند صدق آن درحوزه تعریفی مختص اعضاء A نیست.
درحوزه تعریفی مختص اعضاء A، این امر« عضوی ازخود نبودن بطور نامعین» ( به معنی نفی عضوی ازخود بودن بطورمطلق وعدم تعیّن عضوی ازخود نبودن) تعبیرمی شود که نوعی ازعضوی ازخود نبودن محسوب می شود.
یادداشت: A درمقام عضوی از A، معین نیست کدام عضواز A است و به عنوان یک عضو تعیّن ندارد.

* در۴ مورد فوق، ثابت کردیم که میان هیچ کدام ازآنها مغایرتی وجود ندارد، اما برهانی برای اثبات درستی هرکدام بدست نداده ایم: فرق است میان این که ثابت کنیم درستی هرکدام با درستی دیگری مغایرتی ندارد و این که ثابت کنیم که هرکدام واقعاً درست است.

اکنون جمع بندی ساده تر زیر را ارائه می کنیم:
۱) برای مجموعه A درحوزه تعریفی مختص مجموعه A چنین حکم می کنیم: مجموعه A عضوی ازخود نیست. صدق این حکم متفاوت ازصدق آن درحوزه تعریفی مختص اعضاء A است وازآنجایی که حوزه تعریفی مختص اعضاء A براین حکم عملگری ندارد، درنتیجه مجموعه A نمی تواند به عضویت خود درآید.
۲) درباره مجموعه A درحوزه تعریفی مختص مجموعه A چنین حکم می کنیم: مجموعه A عضوی ازخود است.
اما این حکم درحوزه تعریفی مختص اعضاء A، به صورت « عضوی ازخود نبودن بطورنامعین» تعبیرمی شود که نوعی ازعضوی از خود نبودن محسوب می شود.
عضوی ازخود نبودن بطورنامعین به این معنی است که A به عنوان یک عضو، معین نیست که کدام یک ازاعضاء مجموعه A است و وجود آن تعیّن پذیر نیست. ( تعبیر دیگری که در مورد حکم مجموعه A در بالا در شماره ۳ ارائه شده نیز صحیح است، اما نتایج آن دو درمورد مجموعه A به عنوان یک عضو، در تحلیل نهایی، متفاوت است: اگر در حوزه تعریفی مختص اعضاء A ، حکم به صورت نفی « عضوی از خود نبودن بطورنامعین» تعبیر شود، آنگاه الف) مجموعه A در مقام عضوی از A، « در بی نهایت» عضوی از خود می شود. ب) اگراین بی نهایت را بدلیل خارج از دسترس بودن، نفی کنیم، آنگاه A در مقام « عضوی » از A منتفی می شود و چنین عضویتی ازمیان می رود.)
۳) درباره مجموعه A درحوزه تعریفی مختص مجموعه A چنین حکم می کنیم: مجموعه A عضوی ازخود نیست.
اما چنین حکمی درحوزه تعریفی مختص اعضاء A، به صورت« عضوی ازخود نبودن بطورنامعین» تعبیر می شود که نوعی ازعضوی از خود نبودن محسوب می شود.
عدم تعیّن A به عنوان یک عضو، می تواند دلیلی برای توجیه حکم مربوطه باشد که عضویت مجموعه A را درخودش نفی وانکار می کند.
دراینجا تعریف هرعضو از A برخود مجموعه A با چنین حکمی، عملگری ندارد.
۴) درباره مجموعه A درحوزه تعریفی مختص مجموعه A چنین حکم می کنیم: مجموعه A نه عضوی ازخود است و نه عضوی ازخود نیست.
اما چنین امری درحوزه تعریفی مختص اعضاء A، به صورت« عضوی ازخود نبودن بطورنامعین» تعبیرمی شود که نوعی ازعضوی از خود نبودن محسوب می شود. نامعین بودن A به عنوان یک عضو، موجب می شود که بتوان چنین حکمی را درمورد مجموعه A مطرح کرد.

## تئوری صورت ترکیبی

دراینجا این تئوری را تشریح خواهیم کرد. اشیاء یا محمول هایی که قابلیت ترکیب دارند و پس ازترکیب، خاصه های اشیاء یا محمول های مورد ترکیب را حفظ می کنند، درصورتی که درمجموعه ای که آنها را شامل می شود، درنظرگرفته شوند، ترکیب آنها نیزعضوی ازآن مجموعه خواهد بود.
برای مثال، درمجموعه رنگهای سبز، ترکیب رنگهای سبز بازهم سبزاست وعضوی ازخودش.
درمورد مجموعه A این سؤال مطرح می شود که آیا خاصه مشترکی دراعضاء آن هست تا درباره امکان « صورت ترکیبی» این خاصه، بحث کرد؟
اعضاء مجموعه A هرکدام یک مجموعه اند و با رجوع به تعریف هرعضو از A، هرمجموعه که خاصه اعضاء خود را ندارد، عضوی از A است. بعبارت دیگر، خاصه مشترک هرعضو از A با سایر اعضاء ، عضو نبودن آن مجموعه درخودش است.
برای مثال، مجموعه انسانها، انسان نیست ومجموعه اسبها، اسب نیست. این دو مجموعه به عنوان عضوی از A ، دراین که هیچ کدام عضوی ازخود نیستند و فاقد خاصه اعضاء خود هستند، مشترک اند.
این خاصه مشترک را p می نامیم و مجموعه ای که چنین خاصه ای را داراست و درنتیجه عضوی ازمجموعه A است، « مدلول خاصه p » می نامیم.
هرمدلول خاصه p ازجهتی این خاصه را داراست، برای مثال مجموعه انسانها مدلول خاصه p ازحیث انسان بودن است و مجموعه اسبها مدلول خاصه p ازحیث اسب بودن است.
درهرمدلول خاصه p ، خاصه p دال برآن است که ترکیب اعضاء آن مجموعه، عینی که معنی هرعضو ازآن مجموعه را داشته باشد، بدست نمی دهد. درواقع، داشتن خاصه p ، دلالت بر نفی اطلاق معنی هرعضو ازآن مجموعه، برمجموعه دارد.
ازطرفی، نفی معنای هرعضوازمجموعه درباره خود مجموعه، طیف وسیعی ازخاصه های دیگررا دربرمی گیرد. برای مثال، برمجموعه انسانها، انسان بودن قابل اطلاق نیست و این مجموعه انسان نیست، اما اطلاق خاصه های دیگر برآن نفی نمی شود.
خاصه مشترک دراعضاء مجموعه A عبارتست از: عضوی ازخود نبودن. برای اینکه مشخص شود که آیا مجموعه A عضوی ازخود است یا عضوی ازخود نیست، باید دید آیا ترکیب اعضاء A چه مجموعه ای را ازنظرعضوی ازخود بودن یا عضوی ازخود نبودن بدست می دهد:
۱) اگرمجموعه ترکیب یافته که همان صورت ترکیبی A است، ازحیث خاصه مشترک اعضاء خود، عضوی ازخود باشد، چون این امرمغایربا خاصه مشترک اعضاء A است، درنتیجه مجموعه ترکیبی، عضو A نیست و ازآنجا مجموعه A عضوی ازخود نیست.
باید توجه داشت که دراینجا نمی توان نتیجه گرفت که چون A عضوی ازخود نیست پس عضوی از A که دربردارنده همه مجموعه هایی که عضوی ازخود نیستند، می شود.
علت آن است که همین که A به عضویت خود درآید، با بدل شدن به مجموعه ترکیبی، چنین عضویتی از A سلب می شود، زیرا مجموعه ترکیبی، با خاصه مشترک لازم برای این عضویت مغایرت دارد. مجموعه A تنها پس ازیافتن یک صورت ترکیبی که عضوی ازخود نباشد، می تواند به عضویت خود درآید.
۲) اما اگرمجموعه ترکیب یافته، ازحیث خاصه مشترک اعضاء خود، عضوی ازخود نباشد، چون این امرموافق با خاصه مشترک اعضاء A است، درنتیجه مجموعه ترکیبی، عضو A است و ازآنجا این نتیجه بدست می آید که مجموعه A عضوی ازخود است.
اکنون امکان تئوریک صورت ترکیبی خاصه p را برای مجموعه A بررسی می کنیم. پرسش این است که ترکیب مدلول های

خاصه p ازحیث های مختلف، چه صورتی دارد؟
برای پاسخ به این سؤال، مهمترین نکته توجه به دلالتهای هرعضوازمجموعه هایی است که خود عضوی از A هستند. این دلالتها همان حیث مجموعه مورد نظراست واطلاق خاصه p براین مجموعه ها دال بر نفی این دلالتهاست.
برای مثال، مجموعه انسانها که عضوی از A است، مدلول خاصه p ازحیث انسان بودن است که به معنی نفی دلالت هرعضو ازاین مجموعه درمورد خود مجموعه است. هرعضو از A، مجموعه ای است که هریک، اعضاء معینی را براساس دلالت مشترکی دربرگرفته است. بنابراین، بی شماردلالت برطبق بی شمارمجموعه ی متعلق به A وجود دارد.
این بی شماردلالت درمورد اعضاء A را به صورت < a,b,c,… > نشان می دهیم که هر a، b ، c، ... یک حیث ازاعضاء مجموعه A را معین می کند.
مجموعه هایی که مدلول خاصه p هستند، دال برنفی دلالت هرعضو ازآن درمورد خود مجموعه می باشند. به عبارت دیگر، مدلول های خاصه p ازحیث های a یا b یا c ... دال بر ¬a ( نفی a ) یا ¬b یا ¬c ... درباره آن مجموعه هستند.
ازنظرتئوریک، اگرترکیب اعضاء مجموعه ای ازحیث معینی، همان حیث را بدست ندهد، این مجموعه مدلول خاصه p ازآن حیث خواهد بود که دال برنفی آن حیث درمورد آن مجموعه است. حال اگرفرض کنیم که نفی هرحیث به معنی امکان پذیرفتن حداقل یکی ازحیث های غیرازآن باشد، آنگاه می توان به بررسی امکان وجود یک صورت ترکیبی برای مجموعه A پرداخت.
بنابراین، فرض می کنیم که با نفی دلالت معینی درباره مجموعه ای خاص به سبب مدلول خاصه p بودن آن مجموعه ازحیثی معین، آن مجموعه حداقل یک دلالت را ازمیان بی شمار حیث ممکن، بپذیرد.
برای مثال، فرض کنید مجموعه ای مدلول خاصه p ازحیث a باشد، دراین حالت براین مجموعه ¬a صادق است و این مجموعه حداقل یکی از دلالتهای ممکن را ازمیان سایر حیث ها غیر از a یعنی ازمیان <b,c,d,…> می پذیرد. اگر این امر درباره همه مجموعه هایی که عضو A هستند، همانند تابلو زیرامکان پذیر باشد، آنگاه بررسی ترکیب دلالتهای پذیرفته شده، ممکن می شود.

پذیرفتن حداقل یک دلالت ازمیان <b,c,d,…> ← صدق ¬a درباره آن مجموعه ← مدلول خاصه p ازحیث a

پذیرفتن حداقل یک دلالت ازمیان <a,c,d,…> ← صدق ¬b درباره آن مجموعه ← مدلول خاصه p ازحیث b

پذیرفتن حداقل یک دلالت ازمیان < a,b,d,… > ← صدق ¬c درباره آن مجموعه ← مدلول خاصه p ازحیث c

. . . .
. . . .
. . . .

صورت ترکیبی حاصل ازترکیب بی شماردلالت موجود درسمت راست تابلو، بطورتئوریک، عینی حائز بی شماردلالت است که حداکثربه صورت « $a \wedge b \wedge c \wedge \ldots$ » ( $\wedge$ نشانه و ) قابل بیان خواهد بود. مجموعه ترکیبی مجموعه ای است که شامل همه این عین هاست و هرعضوازآن با خاصه مشترک « $a \wedge b \wedge c \wedge \ldots$ » بودن مشخص می شود.
اگر ترکیب عین های این مجموعه، فاقد دلالت « $a \wedge b \wedge c \wedge \ldots$ » باشد، آنگاه مجموعه همه این عین ها فاقد دلالت هرعضو از آن است، یعنی « $a \wedge b \wedge c \wedge \ldots$ » ¬ درباره آن صادق است. این امر به معنی آن است که مجموعه دربردارنده این عین ها، مدلول خاصه p ازحیث « $a \wedge b \wedge c \wedge \ldots$ » بودن است، درنتیجه این مجموعه عضوی از A است.
علاوه بر روش فوق، روش دیگری هم برای بدست آوردن صورت ترکیبی A امکان پذیراست. این شیوه ازاین قرار است:
اعضاء هرمجموعه از A، با « خاصه معرّف» ی مشخص می شوند که این خاصه، مفهومی- عام- است که برخصوصیات کلی اعضاء دلالت می کند.
اگرازهرکدام ازاین مفاهیم، همه یا تعدادی ازخصوصیات را برگرفته و با هم ترکیب کنیم، خاصه معرّف ی بدست می آید. عین های واجد این خاصه، دریک مجموعه قرارمی گیرند که صورت ترکیبی مجموعه A است.
اگر ترکیب عین های چنین مجموعه ای، فاقد خاصه حاصله باشد، آنگاه مجموعه ترکیبی، مدلول خاصه p ازحیث آن خاصه خواهد بود و درنتیجه به عضویت A درمی آید.
به این ترتیب، نشان دادیم که صورت ترکیبی مجموعه A، ازنظرتئوریک، چه خصوصیاتی باید داشته باشد تا به عضویت A درآید.
باید توجه داشت که درمورد صورت ترکیبی ای که دربالا بدست آوردیم، چنین فرض می شود که یک صورت ترکیبی نهایی است. به عبارت دیگر، ترکیب مجدد اعضاء A با مجموعه ترکیبی منجر به صورت ترکیبی جدیدی نمی شود.
مجموعه ترکیبی A را با $\bar{A}$ نشان می دهیم. $\bar{A}$ مجموعه ای متفاوت از A است.

یادداشت: درشرح فوق دیدیم که اگر $\bar{A} \notin \bar{A}$ آنگاه $\bar{A} \in A$ و این عضویت، پارادوکس راسل را ازمیان برمیدارد.
ذکراین نکته ضروری است که خاصه مشترک اعضاء $\bar{A}$ ، خاصه مشترکی برای همه اعضاء A نیست، زیرا درغیر اینصورت این« همسانی» اعضاء A با $\bar{A}$ منجر به این نتیجه می شود که $\bar{A} \in A \Rightarrow \bar{A} \in \bar{A}$ و با این نتیجه، $\bar{A}$ نمی تواند عضوی از A باشد.
$\bar{A}$ به این دلیل عضوی از A می شود که خاصه مشترک اعضاء $\bar{A}$ درمورد مجموعه $\bar{A}$ صادق نیست.

## $\varnothing$ به عنوان صورت ترکیبی مجموعه راسل

حال به بررسی یک حالت خاص ازصورت ترکیبی می پردازیم. ملاحظه شد که برای تعیین این امرکه مجموعه A، عضوی ازخود است یا عضوی ازخود نیست، باید وضعیت مجموعه ی حاصل ازترکیب اعضاء A مشخص گردد.
اعضاء مجموعه ترکیبی باید واجد خاصه مشترکی مانند « x بودن» باشند و پس از آن عضوی ازخود بودن یا نبودن مجموعه ترکیبی ازحیث x بودن، قابل تعیین است و سپس از روی آن می توان درباره مجموعه A حکم قطعی نمود که قبلاً توضیح داده شد.
حیث مشترک x بودن برای مجوعه ترکیبی، نیاز به عین هایی با خاصه مشترک x بودن دارد. چنین خاصه مشترکی برای اعضاء مجموعه ترکیبی، به صورت « $a \wedge b \wedge c \wedge ...$ » بودن، است.
اگر با توجه به وسعت و بی شماری دلالتهایی که این خاصه، دربردارنده آنهاست، وجود عین هایی را که منعکس کننده چنین خاصه ای است، ناممکن بدانیم، آنگاه مجموعه دربردارنده عین های این خاصه یا همان مجموعه ترکیبی، مجموعه ای بجز تهی نیست.

بنابراین، مجموعه ترکیبی با چنین دیدی هیچ عضوی ندارد، یعنی یک مجموعه تهی است. ازآنجا که $\varnothing \not\in \varnothing$ یا بعبارت دیگر، مجموعه ترکیبی عضوی ازخود نیست، درنتیجه مجموعه ترکیبی عضوی ازA است که این امربه معنی آن است که مجموعه A عضوی ازخود است.
البته باید توجه کرد که چنین حالتی تنها حالتی خاص ازصورت ترکیبی است که پارادوکس راسل را از میان برمیدارد. درباره سایر امکانها بعداً به تفصیل سخن خواهیم گفت.
تهی دانستن مجموعه ترکیبی جنبه ای معنایی دارد: صورت ترکیبی A از نظر تئوریک اعضایی را دربردارد که هرعضو واجد بی شمار خاصه است. اگرچه چنین اعضایی که هریک با بی نهایت خاصه تعریف می شوند ازنظر ریاضی ناممکن نیست، اما ازنظرمعنایی بصورت امری موهوم یا شاید خیالی درمی آید.
بنابراین، عین های واجد چنین خاصه ای بعنوان اعضاء مجموعه ترکیبی، درجهان واقعی وجود ندارند.
تهی بودن مجموعه ترکیبی، ازنظر زیبایی شناختی نیز درخور توجه است، زیرا عملکرد معنایی ویژه ای را به مجموعه تهی به عنوان عضوی ازA - و درعین حال صورت ترکیبی مجموعه A و برطرف کننده پارادوکس راسل- می بخشد.

***

دیدیم که اگرمجموعه ترکیبی، یک مجموعه تهی باشد، بررسی مجموعه A و برطرف کردن پارادوکس راسل آسان می شود. درباره مجموعه A درحالتی که شامل مجموعه تهی است، حکم به عضوی ازخود بودن آن می شود. ازطرف دیگر، ترکیب تهی با سایر اعضاء A مجدداً مجموعه تهی را به عنوان صورت ترکیبی A بدست می دهد.
حال باید دید اگرصورت ترکیبی، ناتهی باشد و درعین حال عضوی ازA باشد، درمورد آن چه می توان گفت؟
اگرمجموعه ترکیبی تهی نباشد، درباره آن با دو مشکل مواجه می شویم که ریشه مشترکی دارند:
الف) ازآنجا که بی نهایت خاصه ی متعلق به مجموعه هایی که عضوی ازA هستند دربدست آوردن خاصه مشترک اعضاء مجموعه ترکیبی دخالت دارند، این مسئله مطرح می شود که آیا از روی این بی نهایت خاصه می توان به خاصه مشترک دست یافت؟
بعبارت دیگر، آیا این کار نیازمند به زمانی نامحدود نیست؟ اگراین کار را به دلیل زمان بی نهایت مورد نیاز برای آن غیرممکن بدانیم، دراین حالت وجود خاصه مشترک برای اعضاء مجموعه ترکیبی نفی می شود و درنتیجه مجموعه ترکیبی به یک مجموعه تهی تقلیل می یابد.
دراینجا، تهی بودن مجموعه ترکیبی با زمان مرتبط می شود.
ب) اگرمجموعه ترکیبی ناتهی باشد، اعضاء آن عین هایی هستند که با خاصه ای مشترک بیان می شوند و به دلیل عضویت مجموعه ترکیبی درA، همین خاصه را می توان برای بدست آوردن خاصه مشترک دیگری بکاربرد و مجدداً مجموعه ترکیبی را با سایر اعضاء A برای حصول مجموعه ترکیبی جدید ترکیب نمود.
به این ترتیب، خاصه مشترک نهایی برای اعضاء مجموعه ترکیبی دست نیافتنی می شود و دچار تغیّردائمی وجستجوی بی پایان برای دست یافتن به آن می شویم.
دو راه برای فائق آمدن براین مشکلات وجود دارد:
۱) وجود مجموعه ترکیبی ناتهی و معین را به عنوان یک اصل بپذیریم.
دراین حالت، صورت ترکیبی A امری استعلایی( برگذرنده) است و به نحوی پذیرفته ایم که مجموعه ترکیبی، شکل نهایی و تکمیلی را داراست.
درچنین حالتی، حاصل ترکیب مجموعه ترکیبی نهایی با سایراعضاء A، مجموعه ای بجزهمان مجموعه ترکیبی نهایی نیست.
به عبارت دیگر، به عنوان یک اصل پذیرفته ایم که ازنفی خاصه ای که اعضاء مجموعه ترکیبی با آن تعریف می شوند، خاصه ای که بیرون از خاصه های معرف اعضاء مجموعه های متعلق به A باشد، حاصل نمی شود تا درترکیب مجدد، خاصه جدیدی را ایجاد کند.
۲) مرزهای تعریف مجموعه A را چنان درنظربگیریم که یکی ازاعضاء آن چنین صورت ترکیبی ناتهی باشد.
بعبارت دیگر، برای شمول مجموعه A محدودیت قائل شویم و مرزهای تعریف آن را نامحدود درنظرنگیریم. محدودیت تعریفی منجربه پایاندارشدن خاصه مشترک اعضاء مجموعه ترکیبی می شود و حصول آن به امری بی پایان بدل نمی شود. محدودیت مرزهای تعریفی موجب می شود که حاصل ترکیب مجموعه ترکیبی با سایراعضاء A ، ازصورت ترکیبی مفروض فراترنرود.
درخاتمه متذکرمی شویم که صورت ترکیبی استعلایی و صورت ترکیبی حاصل ازمحدودیت مرزهای تعریف، عضوی ازخود نیستند و به همین دلیل عضوی ازمجموعه A می شوند.

## رابطه مجموعه راسل(A) و صورت ترکیبی آن

دراینجا، رابطه مجموعه A و صورت ترکیبی آن( رابطه A و $\bar{A}$ ) را بطوردقیق تری مورد بررسی قرارمی دهیم.
نکته اصلی و مهم آن است که درباره مجموعه A به « همان صورت » مجموعه A، نمی توان حکم کرد وعضوی ازخود بودن یا نبودن آن را معین کرد. علت آن است که چنین امری موجب بروز پارادوکس راسل می شود:
اگرحکم شود که A به همان صورت A ، عضوی ازخود نیست، A باید به عضویت خود درآید که حکم را نقض می کند.

ازطرف دیگر، اگرحکم شود که مجموعه $A$ به همان صورت $A$، عضوی ازخود است، درنتیجه بایستی صورتی که به عضویت آن درآمده است، عضوی ازخود نباشد، که حکم را نقض می کند.
بنابراین، ملاحظه می شود که ابتداء باید صورت ترکیبی مجموعه $A$ را معین کرد و سپس براساس عضوی ازخود بودن یا عضوی ازخود نبودن مجموعه ترکیبی، درباره مجموعه $A$ حکم کرد.
مسئله صورت ترکیبی، بطورضمنی هنگام حکم کردن درباره هرمجموعه دیگری هم مطرح است.
برای مثال، هنگامی که بخواهیم درباره عضوی ازخود بودن یا نبودن مجموعه انسانها حکم نمائیم، بطورضمنی صورت ترکیبی مجموعه را درنظرمی گیریم.
به این ترتیب، سؤال اساسی این است که آیا صورت ترکیبی مجموعه $A$، عضوی ازخوداست یا عضوی ازخود نیست؟
اگرخاصه مشترک مجموعه ترکیبی یعنی $\bar{A}$ معین باشد، عین های واجد این خاصه که اعضاء $\bar{A}$ هستند، مشخص می شوند و آنگاه می توان درباره عضوی ازخود بودن یا نبودن $\bar{A}$ ازحیث خاصه مشترک اعضاء حکم قطعی کرد.
با اینهمه ازسه حال خارج نیست:
۱) $\bar{A}$ عضوی ازخود نیست($\bar{A}\notin\bar{A}$ ): دراین حالت $\bar{A}$ عضوی از$A$ می شود و درباره $A$ اینطورحکم می شود که مجموعه $A$ عضوی ازخود است. « دراین حالت مجموعه $\bar{A}$ جدا از$A$ نیست.»
یادداشت: ملاحظه می شود که دراین حالت $A$ پس از« بدل شدن» به $\bar{A}$ به عضویت خود درمی آید و به « همان صورت $A$ » به عضویت خود درنمی آید تا تناقض ایجاد شود.
۲) $\bar{A}$ عضوی ازخود است($\bar{A}\in\bar{A}$ ): دراین حالت $\bar{A}$ نمی تواند عضوی از$A$ باشد و درباره $A$ اینطورحکم می شود که مجموعه $A$ عضوی ازخود نیست. « دراین حالت $\bar{A}$ مجموعه ایی جدا و متمایز از$A$ است.»
یادداشت: ملاحظه می شود که دراین حالت، $A$ بدلیل حکمی که درباره آن شده است، به عضویت خود درنمی آید زیرا با به عضویت خود درآمدن $A$ ، مجموعه $A$ به $\bar{A}$ بدل می شود که دراین حالت مجموعه ایی متمایزاز$A$ است.
۳) $\bar{A}$ چنان است که تکلیفی نامعین ازنظرعضوی ازخود بودن یا نبودن دارد: این حالت درصورتی است که خاصه مشترک اعضاء $\bar{A}$ تمام و کمال معین نیست و درنتیجه $\bar{A}$ معین نیست. دراین حالت، تکلیف $A$ نیزنامعین است و حکم $A$ و$\bar{A}$ به حالت تعلیق درمی آید.
« دراین حالت $A$ و$\bar{A}$ نه جدا ازهم اند و نه با هم.»

سه حالت فوق را می توانیم از$A$ شروع کنیم و بازهم به نتایج بالا برسیم:
۱) $A$ عضوی ازخود نیست: دراین حالت، صورت ترکیبی مجموعه $A$، عضوی ازخود است وعضوی از$A$ نیست. دراین حالت $A$ و $\bar{A}$ جدا ازهم اند.
یادداشت: دراین حالت $A$ بدلیل عضوی ازخود نبودن به عضویت خود درنمی آید زیرا با عضویت $A$ درخود، به $\bar{A}$ بدل می شود که مجموعه ای جدا از$A$ است. علت بدل شدن $A$ به $\bar{A}$ دراینجا آن است که اگر$A$ به « همان صورت $A$» به عضویت خود درآید، عضوی ازخود نبودن آن دچارتناقض می شود.
۲) $A$ عضوی ازخود است: دراین حالت، صورت ترکیبی $A$، عضوی ازخود نیست و درنتیجه به عضویت $A$ درمی آید. دراین حالت $\bar{A}$ عضوی از$A$ است و جدا ازآن نیست.
۳) تکلیف $A$ ازنظرعضوی ازخود بودن یا عضوی ازخود نبودن، نامعین است: دراین حالت، تکلیف$\bar{A}$ نیزنامعین است و حکم $A$ و $\bar{A}$ به حالت تعلیق درمی آید. دراین حالت $A$ و$\bar{A}$ نه جدا ازهم اند و نه با هم.

خلاصه: درمورد مجموعه $A$ به همان صورت مجموعه $A$ ، نمی توان حکم کرد. این امرموجب می شود که درباره $A$ به این نتیجه ی پارادوکسیکال برسیم: مجموعه $A$ عضوی ازخود است اگر و فقط اگرعضوی ازخود نیست.
تئوری صورت ترکیبی این وضعیت متناقض را ازمیان برمیدارد، اما حکم قطعی درباره $A$ به $\bar{A}$ بستگی پیدا می کند. اگر$\bar{A}$ معین باشد، حکم آن هم معین است و ازآنجا حکم قطعی $A$ بدست می آید که یکی ازاین دو حالت است:
۱) $A$ عضوی ازخود است اگر و فقط اگر$\bar{A}$ عضوی ازخود نیست.
۲) $A$ عضوی ازخود نیست اگر و فقط اگر$\bar{A}$ عضوی ازخود است.
اگر$\bar{A}$ بطورمعین دردست نباشد، آنگاه حکم آن هم معین نیست و درنتیجه حکم $A$ معین نمی شود. به عبارت دیگر، درچنین حالتی حکم $A$ نامعین است اگر و فقط اگر حکم $\bar{A}$ نامعین است.

## جمع بندی تئوری صورت ترکیبی

دراینجا، به جمع بندی و تدقیق مطالبی که درباره این تئوری وجود دارد، می پردازیم و برخی ازجنبه های آن را روشن ترمی کنیم. اما پیش ازآن ذکریک مقدمه ضروری است:
درمورد مجموعه $A$، ابتداء باید پرسید این مجموعه ازچه حیثی عضوی ازخود است یا عضوی ازخود نیست؟
برای مثال، مجموعه انسانها ازحیث انسان بودن، عضوی ازخود نیست.
اگرچنین حیثی « عضوی ازخود نبودن» فرض شود و گفته شود که این مجموعه ازحیث عضوی ازخود نبودن،
a) عضوی ازخود نیست: دراینصورت، این حیث درابتداء باید درهرعضو ازمجموعه $A$ موجود باشد. یعنی هرعضو از$A$، « عضوی ازخود نبودن» را دارا باشد.
اما حیث عضوی ازخود نبودن، امری نیست که وجه مشترک همه اعضاء $A$ باشد، زیرا عضوی ازخود نبودن یک صفت ایجابی نیست که درهرعضو، عینیت داشته باشد و با نفی آن به این نتیجه رسید که مجموعه $A$ عضوی ازخود نیست.( نفی حیث مشترک عینی اعضاء درباره یک مجموعه، منجر به این نتیجه گیری می شود که آن مجموعه عضوی ازخود نیست.)
به این ترتیب، عضوی ازخود نبودن مجموعه $A$ ازحیث عضوی ازخود نبودن، کنارگذاشته می شود.

حال اگرگفته شود که این مجموعه ازحیث عضوی ازخود نبودن،
b) عضوی ازخود است: دراینصورت، بازهم وجه مشترک اعضاء $A$ عضوی ازخود نبودن است که خود$A$ باید آن را دارا باشد تا بتواند عضوی ازخود شود.
اما اینجا هم عضوی ازخود نبودن درهرعضو از$A$، یک خاصه ایجابی نیست؛ لذا عینیت ندارد تا وجه مشترک واقع شود. پس خاصه مشترکی وجود ندارد تا $A$ با داشتن آن عضوی ازخود شود.( وجود( یا صدق) حیث مشترک عینی اعضاء درباره یک مجموعه منجر به این نتیجه گیری می شود که آن مجموعه عضوی ازخود است.)
به این ترتیب، عضوی ازخود بودن مجموعه $A$ ازحیث عضوی ازخود نبودن، کنارگذاشته می شود.

جمع بندی: الف) به این ترتیب ملاحظه گردید که فرض « عضوی ازخود نبودن» هرعضو ازمجموعه $A$ به عنوان حیث یا خاصه مشترک اعضاء $A$ امکان پذیرنیست. فرض چنین خاصه مشترکی موجب بروز پارادوکس راسل می شود وعلت آن است که به صورت ایجابی با آن برخورد می شود. اگربه این مطلب که چنین خاصه مشترکی، امری ایجابی نیست تا درهرعضو از$A$ عینیت داشته باشد، توجه گردد، اصولاً اطلاق واژه ی خاصه مشترک برآن ناممکن می شود.
ب) اگرحیث یا خاصه مشترک مجموعه $A$ را درخاصه ای ایجابی برای هرعضو آن جستجو کنیم و وجود یک خاصه مشترک ایجابی را بپذیریم، دراین صورت با سه حالت ممکن مواجه می شویم:
۱) مجموعه دربردارنده عین های این خاصه یعنی مجموعه ترکیبی، $\varnothing$ درنظر گرفته شود: پارادوکس راسل برطرف می شود.
درچنین حالتی، وجود خاصه مشترک انکار نمی شود بلکه وجود عین های واجد خاصه مشترک انکارمی شود. خاصه مشترک با بی نهایت خاصه دیگر بیان می شود ودر نتیجه وجود عین های واجد چنین خاصه ای انکارمی شود.
۲) مجموعه دربردارنده اعضاء واجد این خاصه یعنی مجموعه ترکیبی، « ناتهی ومعین» درنظر گرفته شود: پارادوکس راسل برطرف می شود.
درچنین حالتی، وجود این مجموعه ناتهی ومعین یا به عنوان یک اصل پذیرفته شود یا نتیجه محدودیت قائل شدن درمرزهای تعریف مجموعه $A$ تلقی می گردد.
دراین حالت، اگر$\bar{A}$ ازحیث خاصه مشترک اعضاء خود( که همان خاصه مشترک ایجابی قابل اطلاق به هرعضو از$A$ است) عضوی ازخود باشد، عضوی از$A$ نیست و درنتیجه حکم $A$ عبارتست از: $A$ عضوی ازخود نیست.
اما اگر$\bar{A}$ ازحیث خاصه مشترک اعضاء خود، عضوی ازخود نباشد، به عضویت $A$ درمی آید و درنتیجه حکم $A$ عبارتست از: $A$ عضوی ازخود است.

یادداشت: دررابطه با حالتی که $\bar{A}\notin\bar{A}$ و از روی آن حکم به عضوی ازخود بودن $A$ می شود، باید توجه داشت که بطورکلی، خاصه مشترک ایجابی برهرعضو از$A$ قابل اطلاق است، اما« عین های» واجد این خاصه مشخصاً درمجموعه ترکیبی واقع می شوند و ملاک عضویت در$A$ خاصه مشترک ایجابی نیست.
بنابراین، نباید این برداشت نادرست ایجاد شود که هرعضو از$A$ خاصه مشترک را داراست بجزمجموعه ترکیبی( بدلیل $\bar{A}\notin\bar{A}$) ، و ازآنجا نتیجه گرفت که: چنین خاصه ای یک خاصه مشترک نیست یا نتیجه گرفت که مجموعه ترکیبی نمی تواند عضوی از$A$ باشد، زیرا خاصه مشترکی که هرعضو از$A$ داراست، برآن صدق نمی کند و درنتیجه به عضوی ازخود نبودن $A$ حکم کرد یا نتیجه گرفت که هرعضو ازمجموعه $A$ با اعضاء مجموعه ترکیبی همسان است و درنتیجه $\bar{A}\in\bar{A}$ و ازآنجا به عضوی ازخود نبودن $A$ حکم کرد. همه این نتایج اشتباه بوده و ناشی ازبرداشت نادرست اولیه است.( مجموعه ترکیبی باید در- خود عضوی ازخود نباشد تا به مجموعه ای برای $A$ بدل شود.)

۳) بپذیریم که مجموعه دربردارنده اعضاء واجد این خاصه یعنی مجموعه ترکیبی، بطورتمام و کمال و معین دست یافتنی نیست.
علت دست نیافتنی بودن این مجموعه چنین می تواند بیان شود: حصول خاصه مشترک ایجابی که بر هر عضو از$A$ قابل اطلاق باشد، بدلیل بی شماربودن اعضاء $A$ و درنتیجه خاصه هایی که اعضاء $A$ براساس آنها تعریف می شوند، امری بی پایان است.
به این ترتیب، مجموعه دربردارنده اعضاء واجد خاصه مشترک به امری ساختنی بدل می شود که پایانی برای آن نیست. درچنین حالتی، وجود این مجموعه انکار نمی شود و عملگری بی پایان برای بدست آوردن یا بعبارت دیگر ساختن آن درجریان است. دراین حالت $\bar{A}$ بطورمعین دردسترس نیست و حکم $\bar{A}$ به حالت تعلیق درمی آید و براین اساس حکم $A$ به حالت تعلیق درمی آید و حکم قطعی امکان پذیر نیست.
بی پایانی حصول خاصه مشترک علاوه براین موجب می شود که نتوان درباره وجود عینی اعضاء واجد چنین خاصه ای اظهارنظرقطعی کرد.
به عبارت دیگر، مشخص نیست که آیا عین های واجد این خاصه وجود دارند و مجموعه دربردارنده آنها ناتهی است یا عین های واجد این خاصه وجود خارجی ندارند ومجموعه دربردارنده آنها تهی است؟
هر یک از سه حالت فوق از« ب» پذیرفته شوند، صحیح خواهد بود و پارادوکس راسل برطرف می شود، هرچند که نتوان درباره $A$ بطورقطعی حکم کرد.
ج) اگر وجود خاصه مشترک ایجابی که برهرعضو$A$ قابل اطلاق باشد، به عنوان حیث مشترک مجموعه $A$، انکار و نفی شود، به این ترتیب وجود مجموعه دربردارنده اعضاء واجد این خاصه یعنی مجموعه ترکیبی نیز نفی و انکار می شود: درچنین حالتی، سخن گفتن از عضوی ازخود بودن یا نبودن $A$ ناممکن است و چنین سخنی بی معنا می شود.

## وضعیت بینابینی

قبل ازبیان این وضعیت ذکر یک مقدمه ضروری است:
اگر براساس شهودی که ازمجموعه $A$ و عضوی ازخود بودن یا نبودن یک مجموعه داریم، درباره مجموعه $A$ بطورشهودی قضاوت کنیم، با دو حالت همسان مواجه می شویم:
۱) عضوی ازخود بودن $A$ را نفی کنیم ولی این نفی را به معنی عضوی ازخود نبودن آن درنظرنگیریم. درچنین حالتی، $A$ دریک وضعیت بینابینی واقع می شود. دراینجا، عضوی ازخود بودن $A$، فرض $A$ به عنوان عضوی از$A$ به « همان صورت $A$» است که پیش ازاین

تناقض آن را نشان داده ایم. اما برای رهایی ازاین تناقض، به عضوی ازخود نبودن A متوسل نمی شویم، بلکه برای A یک وضعیت بینابینی قائل می شویم.

۲) عضوی ازخود نبودن A را نفی کنیم ولی این نفی را به معنی عضوی ازخود بودن آن درنظرنگیریم. درچنین حالتی نیز، A دریک وضعیت بینابینی واقع می شود. عضوی ازخود نبودن A، فرض A به « همان صورتA» است که بدلیل شمول تعریف هرعضو ازA درمورد خود A، دچارتناقض می شود. اما برای رهایی ازاین تناقض، به عضوی ازخود بودن A متوسل نمی شویم، بلکه برای A یک وضعیت بینابینی قائل می شویم.

پس ازاین مقدمه، اکنون وضعیت بینابینی را دقیق تر مورد بررسی قرارمی دهیم.

این بررسی را با نگرشی جدید به پرسشی دیرینه آغازمی کنیم: آیا مجموعه همه مجموعه هایی که عضوی ازخود نیستند، عضوی ازخود است یا عضوی ازخود نیست؟

پاسخ چنین است: این مجموعه، خود ثابتی ندارد تا چنین پرسشی قابل طرح باشد. خود ثابت به این معنی که مجموعه مورد نظر، بطورمشخص موجود باشد و وجود آن بصورت امری بی پایان- برای بدست آوردن آن- نباشد.

« همه» مجموعه هایی که عضوی ازخود نیستند، بطورمشخص دردست نیست و بخشی ازآنها ازروی آنچه که ازاین مجموعه ها دردسترس است، بدست می آیند و به عبارت دیگر ساخته می شوند و این امر روندی بی پایان است.

این امر بی پایان ساختگرایانه، وجود یک خود ثابت و نهایی راغیرممکن می سازد. ازطرف دیگر، عدم وجود یک خود ثابت، پارادوکس را ازمیان برمیدارد.

قضیه: یک صورت ثابت و نهایی برای مجموعه همه مجموعه هایی که عضوی ازخود نیستند، وجود ندارد.

برهان ساختگرایانه: فرض کنیم صورتی ثابت و نهایی برای این مجموعه، بصورت مجموعه A وجود دارد. آنگاه خواهیم داشت:

۱) اگر $A \notin A$ آنگاه $A \in A$ .

۲) اگر $A \in A$، چون هرعضو A عضوی ازخود نیست، پس A به عنوان عضوی ازA، عضوی از خود نیست، یعنی $A \notin A$ .

به این ترتیب، امری ثابت ومعین مانند A در وضعیتی متناقض واقع می شود، پس فرض خود ثابت درست نیست.

اگر قائل به خود ثابتی برای A نشویم، استدلال های (۱) و(۲) ازبرهان فوق برای حالت زیر بکار می آیند:

براساس استدلال (۱)، A عضوی ازخود نیست و به عضویت خود درمی آید، اما برطبق استدلال(۲)، 'A' به عنوان یک عضو، خود A ی دربردارنده نیست که عضوی ازخود شده باشد، پس A بعنوان دربردارنده چنین عضوی، موضوع استدلال (۱) قرارمی گیرد و خود را به عضویت درمی آورد و باز برطبق استدلال (۲) آنچه به عضویت درآمده است، همان مجموعه دربردارنده نیست و درنتیجه مجموعه دربردارنده مجدداً موضوع استدلال (۱) قرارمی گیرد وبراین قیاس، این روند بطور بی پایان ادامه می یابد.

بطورکلی، اگرفرض وجود خود ثابت و معینی را برای مجموعه همه مجموعه هایی که عضوی ازخود نیستند، مردود بدانیم، دراستدلال (۱)، $A \notin A$ درباره مجموعه ای است که هرمجموعه ازاین سنخ را دربردارد ودرعین حال، درحال ساخته شدن است و بنابرعضوی ازخود نبودن، خود را دربرمی گیرد اما با این دربرگرفتن، خود اولیه آن تغییرمی کند و A دربردارنده مجموعه ای می شود که خود را دربرندارد، لذا مجدداً عضوی ازمجموعه ای با خود نامعین می شود که درحال ساخته شدن است و این روند بطور بی پایان ادامه می یابد.

ازبرهان فوق این نتیجه بدست می آید که تناقضی که مربوط به کل یعنی A است پس از رفع، قرارهرجزء یعنی هرعضوازA را مشخص می کند و عملکرد آن مشخص کننده جزء می شود. به عبارت دیگر، تناقضی که برای A بعنوان یک کل مطرح بود، با جزئی شدن A( یا با جزئاً مشخص شدن A) و عملکرد تناقض جهت جزئی ساختن A، رفع می شود.

تعیّن مجموعه A منجربه پارادوکس راسل می شود، وقتی چنین تعیّنی مردود باشد، این مجموعه نه عضوی ازخود است و نه عضوی ازخود نیست، بلکه دریک وضعیت بینابینی واقع می شود.

## وضعیت بینابینی و صورت ترکیبی

درقسمت های قبل نشان داده شد که خاصه مشترک اعضاء $\bar{A}$ مشخص نیست و به همین دلیل حکم $\bar{A}$ و درنتیجه حکم A به حالت تعلیق درمی آید. دربیان مطالب دراین باره، اعضاء A کاملاً معین و دردسترس فرض می شد و به علت روند بی نهایت برای حصول به خاصه مشترک اعضاء $\bar{A}$ ، حکم به حالت تعلیق درمی آمد.

حال اگرمجموعه A را فاقد تعیّن درنظرگرفته و اعضاء آن را بطور کامل دردسترس ندانیم، ناچاریم برای آنچه که ازA دردسترس است، بدنبال صورت ترکیبی بگردیم.

درچنین حالتی، ساختن $\bar{A}$ درواقع چیزی جز ساختن A نیست وA و $\bar{A}$ هر دو به امری ساختنی بدل می شوند و هردو در وضعیتی بینابینی واقع می شوند.

باید توجه داشت که وضعیت بینابینی با تعلیق حکم متفاوت است، زیرا درتعلیق حکم، اعضاء A همگی دردسترس فرض می شوند.

به این ترتیب، ازآن اعضاء A که « تا حد ممکن» دردست هستند، آغازمی کنیم تا صورت ترکیبی آن را بدست آوریم:

$$
\begin{array}{llllll}
A_1 = \{x_1,\ x_2,\ x_3, \dots\} & A_1 \notin A_1\ , & A'_1 \notin A_1 & \Rightarrow A'_1 \in A'_1 & & \\
 & & \downarrow & \quad\ \downarrow & & \\
A_2 = \{x_1,\ x_2,\ x_3, \dots,\ A'_1\} & A_2 \notin A_2\ , & A'_1 \in A_2 & \Rightarrow A'_1 \notin A'_1\ , & A'_2 \notin A_2 & \Rightarrow A'_2 \in A'_2 \\
 & & & & \downarrow & \quad\ \downarrow \\
A_3 = \{x_1,\ x_2,\ x_3, \dots,\ A'_1, A'_2\} & A_3 \notin A_3\ , & A'_3 \notin A_3 & \Rightarrow A'_3 \in A'_3\ , & A'_2 \in A_3 & \Rightarrow A'_2 \notin A'_2 \\
\cdot & & \cdot & & \cdot &
\end{array}
$$

$A_1$ اعضایی از $A$ را دربرمی گیرد که تا حد ممکن دردست هستند. $A'_1$ ، $A'_2$ ، $A'_3$ به ترتیب صورتهای ترکیبی $A_1$ ، $A_2$ ، $A_3$ هستند.
تابلوی فوق، ساخته شدن $A$ و $\bar{A}$ را نشان می دهد. $A_1$ ، $A_2$ ، $A_3$ ، ... مراحلی از روند ساختن هستند. قواعد وضعیت بینابینی و روابط $A$ و $\bar{A}$ درجای خود بکار می روند و به نوعی درهم ادغام می شوند:
$A_1$ عضوی از خود نیست، لذا $A'_1$ عضوی ازخود است و با گذر به مرحله دوم، $A_1$ عضوی ازخود می شود و درنتیجه $A'_1$ یا همان صورت ترکیبی خود را شامل می شود و درنتیجه $A'_1$ اینک عضوی ازخود نیست. حاصل این مرحله $A_2$ است که عضوی ازخود نیست و $A'_2$ که عضوی ازخود است. با گذر به مرحله سوم، $A_2$ عضوی ازخود می شود و درنتیجه $A'_2$ یا همان صورت ترکیبی خود را شامل می شود و درنتیجه $A'_2$ اینک عضوی ازخود نیست. حاصل این مرحله، $A_3$ است که عضوی ازخود نیست و$A'_3$ که عضوی ازخود است و برهمین قیاس ادامه می یابد.
از روی این تابلو، $A$ را به این شکل می توان درنظر گرفت: $A=\{ x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , A'_1 , A'_2, A'_3 , \ldots\}$

علاوه براین، تابلو فوق را به این طریق نیزمی توان تعبیر کرد:
قبلاً دیدیم که وجود صورت ترکیبی نهایی، به عنوان یک اصل پذیرفته می شود. اگراین اصل پذیرفته نشود، هرصورت ترکیبی که بدست می آید، درترکیب با سایراعضاء $A$ ، صورت ترکیبی جدیدی را بدست می دهد واین روند بطور بی پایان ادامه می یابد.
دراین روند، هرگاه صورت ترکیبی حاصله، عضوی ازخود نباشد، به عضویت $A$ درمی آید و درساختن $A$ شرکت می کند. به دیگرسخن، انکار این اصل، پذیرش حیطه ای ساختگرایانه است.
به این ترتیب، درتابلو فوق $A'_1$ درترکیب با سایراعضاء $A_2$ ، $A'_2$ را که صورت ترکیبی جدیدی است، بدست می دهد و $A'_2$ درترکیب با سایراعضاء $A_3$ ، صورت ترکیبی جدید $A'_3$ را بدست می دهد و الی آخر. $A'_1$ ، $A'_2$ ، $A'_3$ و ... هر یک عضوی ازخود نیستند و درنتیجه عضوی از$A$ می شوند.

یادداشت: ازروی تابلو بالا، همچنین شکل دیگری را برای $A$ می توان درنظرگرفت، که عبارتست از:
$A=\{ x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , A_1 , A_2 , A_3, \ldots\}$

دراینجا $A'_1 , A'_2, A'_3 , \ldots$ نمی توانند درکنار سایر اعضاء این مجموعه قرار گیرند، زیرا برای مثال عضویت $A'_1$ و $A_1$ با هم در$A$ ، به سبب اینکه دال بر تمایز و جدایی $A'_1$ از $A_1$ است و ازآن $A'_1 \in A'_1$ حاصل می شود( یعنی $A'_1$ عضوی ازخود است، پس نمی تواند عضوی از$A$ باشد)، غیرممکن است.
این شکل از$A$ با شکل قبلی که برای $A$ ارائه گردید متفاوت است، اما هر دوی آنها به عنوان مجموعه همه مجموعه هایی که عضوی ازخود نیستند، قابل قبول است.
ازاین مطالب می توان اینطوراستنتاج کرد که مجموعه $A$ و« مجموعه همه مجموعه هایی که عضوی ازخود هستند» با یکدیگر رابطه دارند و با هم درتعامل اند: $A$ به هرکدام از دو شکل پذیرفته شود، اعضاء مجموعه همه مجموعه هایی که عضوی ازخود هستند، بطور مرتبط با اعضاء $A$ معین می شوند و برعکس.
درواقع، انتخاب قطعی میان این دو شکل ازمجموعه $A$ ممکن نیست و هرکدام ازآنها یک مجموعه متفاوت را مشخص می کند که اعضاء آن، همه مجموعه هایی که عضوی ازخود نیستند، می باشد؛ درنتیجه انتخاب قطعی میان دو شکل ازمجموعه همه مجموعه هایی که عضوی ازخود هستند، نیزممکن نیست.

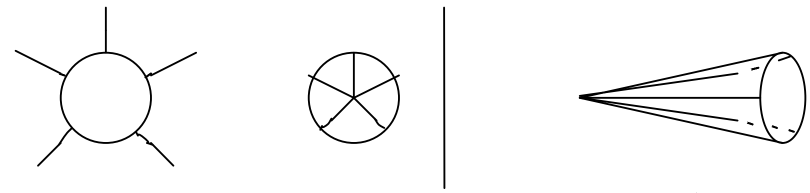
## مجموعه متجلی

دراین قسمت، مجموعه $A$ را ازدیدگاه دیگری تحلیل می کنیم که منجر به ارائه ایده ای می شود که آن را مجموعه متجلّی می نامیم.
دراین رابطه، دو حالت امکان پذیراست که پذیرش هریک، پارادوکس را ازمیان برمیدارد.
الف) مجموعه $A$ دربرنداشتن خود را می نمایاند، به عبارت دیگر« ظهور و تجلی» خود آن دربرندارندگی است که هستندگی خود آن است( هستندگی دربرندارنده)، پس دربردارنده ی « خود دربرندارنده» است، یعنی خود را بصورت دربرندارندگی دربردارد.
برای روشن ترکردن مطلب، وجود مجموعه مورد بحث را امری بیرونی می نامیم و دربرداشتن خودش را امری درونی می نامیم.
برای دست یافتن به امردرونی، وارد مجموعه مورد بحث می شویم؛ اما نشان دادن این امر درونی مستلزم اشاره بیرونی به آن است، یعنی ما همچنان دربیرون ازمجموعه مورد بحث واقع می شویم: امر درونی بطور بیرونی متجلی می شود.
بیرون شدگی امر درونی، قابلیت امکان اشاره بیرونی به امر درونی است.
این بیان که مجموعه مورد بحث دربردارنده امری درونی است، امربیرونی آن را برامردرونی منطبق می سازد؛ یعنی دربردارنده ی خود دربرندارنده است. اشاره ی بیرونی همچنین اشاره ای به دربردارندگی آن است. امر بیرونی بطوراینهمان با امر درونی متجلی می شود.

نتیجه: مجموعه مورد بحث، دوگانگی منطبق برهم است: مجموعه، دربردارنده ی خود دربرندارنده است( دوگانگی) و مجموعه، دربرندارنده است( انطباق و وحدت).
دربردارندگی دراین مجموعه بصورت امری جزئی نیست، بلکه امری منطبق برکل مجموعه است و ازطرف دیگر کل مجموعه، تجلی دربرندارندگی است. چنین مجموعه ای را که نامتعارف است، « مجموعه متجلی» یا مجموعه 'خود نما' می نامیم.

برای درک بهترمطلب، توجه به نکات زیر روشن کننده است:
۱) هرمجموعه که عضوی ازخود نباشد، عضوی ازمجموعه $A$ است. اکنون این گزاره را درنظر می گیریم: اگر ' مجموعه $A$ بصورت درونی'

عضوی ازخود نیست، آنگاه عضوی از ’ مجموعه A بصورت بیرونی‘ است.
درنظریه تجلی، این دو صورت ازمجموعه A درواقع یک چیزهستند و فقط دو تلقی متفاوت ازA می باشند. بیان و ادراک دو تلقی متفاوت از مجموعه A ، باعث ظهور پارادوکس می شود که نشان دهنده ی عدم تجانس در ادراک مجموعه A است.
تلقی درونی ازمجموعه A به عنوان یک تلقی، به ظاهرمتمایز ازصورت بیرونی است، اما درواقع چنین نیست و وقتی صورت بیرونی مجموعه، صورت درونی را دربرمی گیرد، درواقع چیزی بیشترازصورت بیرونی وجود ندارد. تمایز بین این دوصورت، واقعی نیست و تنها ادراکی و ذهنی است.
عضوی ازخود نبودن مجموعه A، در درون مجموعه قابل بیان نیست( ظهور پارادوکس) و آن را فقط بصورت بیرونی می توان بیان کرد که دال بر دربردارنده دربرندارندگی است.
درمجموعه A تناقضی وجود ندارد، بلکه درتوصیفی که به آن تعلق می گیرد، تناقض هست.
شکل زیر ممکن است درفهم این مطلب، کمک کننده باشد. ازشکل الف به عنوان یک " مخروط " توخالی، می توان دو تلقی ادراکی متمایز بصورت اشکال ب داشت. بیان این دوتلقی، باعث ادراکی نامتجانس ازشکل الف می شود که درواقع، شکل الف چنین نیست.



( الف) ( ب)

یادداشت: اگرمخروط، توخالی درنظر گرفته شود، شعاع های دایره که ' درون' آن واقع اند، بین درون و بیرون مخروط مشترک می شوند.
و اگرمخروط، توپر درنظر گرفته شود، شعاع های دایره، در یک حالت در بیرون مخروط واقع می شوند و درحالتی دیگر، در درون مخروط واقع می شوند.
۲) وقتی دراینجا می گوییم A دربرندارنده است، A واجد خاصه معرف اعضاء A نمی شود تا به عضویت خود درآید. منظورازاین گفته آن است که مجموعه A به عنوان دربرندارنده متجلی می شود و به تبع آن دربردارنده این تجلی است که این دربردارندگی، ظهورتمامیت متجلی مجموعه است؛ نه اینکه به معنی متعارف، خودش عضوی ازمجموعه باشد.
۳) باید دانست که درمجموعه متجلی، دربرندارندگی موجب عملگری تعریف اعضاء مجموعه برخود نمی شود. دربرندارندگی آن موجب عضویت آن درخود نمی شود تا براساس تعریف معینی، ازدیگراعضاء متمایز گردد، بلکه دربرندارندگی آن درتمایز آن دریکتایی خود است.
تمایزآن به عنوان دربرندارنده، درواقع شدگی یکتای آن است ، نه درقرار آن درمیان بی نهایت ازاعضاء متمایز.
مجموعه متجلی به عنوان امری یکتاست که هیچ دربرندارنده ای ازکلیت آن خارج نیست تا ازآنها متمایزگردد و با تمایزی تعریفی شناخته شود؛ دربرندارندگی متمایزآن دریکتایی آن است.
۴) درتبیین دربرندارندگی براساس تجلی گری، مجموعه A را به دوصورت می توان درنظرگرفت:
۱- وجود و کلیت آن برمبنای امری بی پایان برای رسیدن به آن باشد، که منظور وضعیتی بینابینی است. دراین صورت، کلیت آن برمبنای عملکردی بی نهایت است که درنتیجه هیچ دربرندارنده ای جدا و متمایزازآن نیست و دربرندارندگی آن تجلی گری بی مرزی است که نهایتی ندارد.
درچنین صورتی، عملکرد بی نهایت در وضعیت بینابینی و تجلی گری( به عنوان رفع کننده های پارادوکس) درهم ادغام شده اند.
۲- وجود و کلیت آن امری یکتا و منحصربفرد است که قرارآن درخود، تمایزیکتای آن را نقض می کند و دربرندارندگی آن تمایزی یکتاست چونان کل.

ب) مجموعه A عضوی ازخود است، اما این عضو، دربرندارنده به معنی متعارف نیست بلکه مجموعه ای متجلی است که دربردارندگی خود را متجلی می کند. هرعضو ازA ، عضوی ازمجموعه متجلی درونی نیزهست، اما مجموعه متجلی به عنوان یک عضو ازA در درون مجموعه متجلی نیست بلکه دربرداشتن خود را متجلی می کند وخود را بصورت ’خود نما‘ شامل است.
مجموعه A خود را بصورت دربردارنده دربردارد، اما این خود درونی، خود را بصورت دربرندارنده دربردارد و دربردارندگی دربرندارنده را متجلی می کند.
برای روشن شدن مطلب، ذکردو نکته ضروری است:
۱- ممکن است این حالت به این ترتیب مورد اعتراض واقع شود: مجموعه A که شامل مجموعه هایی که عضوی ازخود نیستند و مجموعه متجلی است، بدلیل اینکه شامل عضوی نیست که این شمول آن را نشان دهد، پس عضوی ازخود نیست.
درپاسخ باید گفت که این شمول نیز درمجموعه متجلی که عضوی ازA است، به ظهور می رسد و تأثیری درتجلی آن ندارد و مجموعه متجلی همان مجموعه A است با همه شمول آن که درونی شده است. بنابراین، A عضوی ازخود است.
۲- دراین حالت، امربیرونی جزئاً ( یعنی ازنظراعضاء) دربردارنده خود است ولی امردرونی با تجلی گری دربردارنده خود است.
این تفاوت امربیرونی و درونی است، اما این دولازم و ملزوم یکدیگرند و برای وجود مجموعه A ضروری اند.

ازآنجایی که امردرونی مجموعه ای است که بنا به تعریف نمی تواند خود را جزئاً و بطور درونی دربرگیرد و ازطرف دیگر با امر بیرونی اینهمان است، خود را می نمایاند و دربرداشتن خود را نمایانگری می کند که این امربا مجموعه های متعارف مغایرت دارد:
امربیرونی فقط ازاعضاء تشکیل شده ولی امردرونی مجموعه ای است که ازهمان اعضاء، تشکیل شده اما خود را به عنوان یک عضو، متجلی می کند. مجموعه متجلی دراین حالت، ازنظراعضاء، دربرندارنده خود است ولی دربردارندگی را متجلی می کند.

## مجموعه راسل A وأشکا ل بی نهایت

دراین قسمت، وضعیت بینابینی و دو حالت ازتجلی گری را ازنظراشکا ل بی نهایت مورد بررسی قرارمی دهیم.
هرکل بی نهایتی بصورت یکی ازدو شکل *بدون مرز*( دراینجا بی مرزی به مفهوم هندسی آن نیست.) و *مرزدار*است.
کل بی نهایت بدون مرز مانند سطح بی نهایت یا خط راست بی نهایت که آغاز و انجام آن معین نیست. چنین کل بی نهایتی، بدون مرزاست، اما « خودْ بَسنده» است، یعنی مرزی ندارد اما این بی مرزی، درخود بسنده است و دربردارنده هرکل بی نهایت دیگری نیست.
خود بسنده بودن آن به این معنی است که بی مرزی آن هرمرز دیگری را دربرنمی گیرد یا ازهرمرز دیگری فراترنمی رود.
این چنین بی نهایتی، گستردگی درخود است و هرگستردگی برای آن و درآن نیست.
کل بی نهایت مرزدار مانند نقاط واقع درفاصله ی ( ۱, ۰ ) یا نقاط واقع برسطحی محدود است. آنچه درچنین کلی واقع است، بی نهایت است اما مرزهای آن معین است. هرچه درتعریف این کل بگنجد، درآن واقع می شود و چیزی نیست که واجد تعریف آن باشد اما درآن واقع نشود.
کل بی نهایت مرزدارهمچنین می تواند کلی یکتا و منحصربفرد باشد، درچنین حالتی هرامر واجد تعریف، درآن واقع و با آن رابطه مند است.
دروضعیت بینابینی که یک عدم تعیّن ازجهت دربردارندگی یا دربرندارندگی، برمجموعه A حاکم است و A دروضعیتی حد واسط یا حد فاصل این دو است، مجموعه A به عنوان یک کل، کلی بدون مرز و خود بسنده است.
اکنون به نظریه تجلی می پردازیم؛ درحالت تجلی گری مجموعه A دوحالت دارد:
الف) مجموعه A به عنوان یک مجموعه متجلی درحالتی که دوگانگی منطبق برهم و اینهمان است، همانطورکه قبلاً تشریح گردید، دوصورت ممکن دارد:
۱- وجود آن ازطریق عملگری بی پایان بدست می آید یا ساخته می شود و دربرندارندگی آن تجلی گری بی مرزی است که از روند بی پایان حصول آن متجلی می شود. دراین صورت، مجموعه A یک کل بی نهایت بدون مرز و خود بسنده است.
۲- وجود و کلیت مجموعه A، امری یکتا و منحصربفرد است. دراین صورت، مجموعه A یک کل بی نهایت مرزدار اما یکتا و منحصربفرد است.
ب) مجموعه A درحالتی که دربردارنده خود است اما امردرونی ازنظراعضاء، خود را دربرندارد بلکه دربردارندگی خود را متجلی میکند، یک کل بی نهایت بدون مرز و خود بسنده است.

## روش ساختگرایانه درمجموعه راسل

مجموعه راسل A، شامل مجموعه ای است که بطرف A می رود( یعنی سایر اعضاء A را دربرمی گیرد ونیزمدام همه اعضاء' ساخته شده اش' را دربرمی گیرد تا بتواند 'خودش' را هم دربرگیرد، ولی چون خودش مدام با ساخته شدن تغییرمی کند، همواره یک قدم از'خودش' عقب است.) و می خواهد مانند A شود، اما همواره « عضوی از خود نیست» ؛ درحال ساخت است و هرگز مانند A نمی شود؛ پس A هم عضوی از خود نیست.

$$A = \{\ x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ \dots\ ,\ \{\dots\}\ \} \quad \{\dots\} \to A$$

$x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ \dots$ هر یک مجموعه هایی هستند که عضوی ازخود نیستند و $\{\dots\}$ همان مجموعه ای است که بطرف A می رود و شامل مجموعه های $x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ \dots$ نیز هست. ▫

## فصل دوم: پیوستار و مسئله عدد اصلی آن.

### مقدمه

گئورگ کانتور Georg Cantor ( ۱۹۱۸ -۱۸۴۵)، واضع نظریه مجموعه ها، قضیه ناشمارایی مجموعه اعداد حقیقی **R** را مطرح نمود.
یک مجموعه نامتناهی infinite set وقتی شمارا countable است که تناظر یک به یکی one by one correspondence بین عضوهای آن مجموعه و مجموعه اعداد طبیعی **N** برقرار باشد، یا بعبارت دیگر با مجموعه ی اعداد طبیعی همتوان equipotent باشد.
بطورغیرفنی، خاصیت مشترک بین یک مجموعه و تمام مجموعه های همتوان با آن را عدد اصلی Cardinal number آن مجموعه می نامند و عدد اصلی یک مجموعه نامتناهی را عدد اصلی ترا متناهی Transfinite می نامند.
کانتور عدد اصلی یک مجموعه شمارای نامتناهی را با نماد $\aleph_0$ ( الف- صفر aleph-null ) نشان داد. کانتور نخست فکرمی کرد که هرمجموعه نامتناهی، شماراست. اما قضیه ای که برهان کانتور برای آن دراین فصل خواهد آمد، برای او و ریاضیدانان عجیب بود.
او برهانی برای ناشمارا بودن مجموعه اعداد حقیقی Real numbers ارائه داد و لذا نتیجه گرفت که عدد اصلی مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر ازمجموعه اعداد طبیعی Natural numbers است. او نماد $c$ را برای نشان دادن عدد اصلی مجموعه اعداد حقیقی( پیوستار) بکاربرد.
این قضیه، این سؤال را متبادر کرد که آیا عدد اصلی دیگری بین $\aleph_0$ و $c$ وجود دارد؟ این سؤال، مسئله پیوستار نامیده می شود.
پژوهش کانتور و دیگران برای یافتن مجموعه ای با این عدد اصلی، با شکست مواجه شد. او حدس زد که جواب این سؤال منفی است. این حدس به فرض( یا گمان) پیوستار Continuum hypothesis معروف است.
مسئله پیوستار از مسائل مهم ریاضی بشمار آمد، زیرا راه حلی برای آن پیدا نشد. تا اینکه در سال ۱۹۳۸ کورت گودل Kurt Gödel ثابت کرد که فرض پیوستار نسبت به اصول موضوع axioms نظریه مجموعه ها، سازگار است و نهایتاً درسال ۱۹۶۳، پل کوهن Paul J. Cohen ثابت کرد که فرض پیوستار با اصول موضوع متعارف نظریه مجموعه ها قابل اثبات نیست و عبارتی تصمیم ناپذیر undecidable است، یعنی می توان خود آن یا نفی آن را به عنوان یک اصل پذیرفت.

دراین بخش، نخست اثبات کانتور از ناشمارایی **R** را بررسی می کنیم. کانتور دراین برهان از خلف شمارا بودن **R** آغاز می کند و به تناقض می رسد.

پس ازشرح برهان کانتور، نشان داده می شود که شروع از فرض خلف شمارایی، به تناقضی منجر نمی شود، اما درعین حال دچار وضعی می شویم که شمارایی و ناشمارایی **R** هر دو قابل قبول است و می توانیم یکی ازآن دو را به عنوان یک اصل بپذیریم.

در بخش بعدی، برهان دیگری که برای اثبات ناشمارایی **R** ارائه شده و درآن از اصل بازه های تو در تو axiom of nested intervals استفاده می شود، مورد بررسی قرارمی گیرد و همان نتیجه نشان داده می شود.

دربخش آخراز این فصل به قضیه ای می پردازیم که با مسئله عدد اصلی **R** ارتباط دارد.

برخی از ایده ها و تحلیل های این فصل تاکنون سابقه نداشته اند و برای اولین بار مطرح می شوند.

از نظر تاریخی نیز باید خاطر نشان کرد که براوئر L.E.J. Brouwer ( ۱۹۶۶ -۱۸۸۱) ریاضیدان بزرگ هلندی که به شهود گرایی شهرت دارد و مبانی فلسفی آن را به عنوان روشی ساختی constructive در ریاضیات پایه گذاری کرده است، در ابتداء عقیده داشت که عدد اصلی **R** ، $\aleph_۰$ است و دراین مورد در سال ۱۹۱۲ طی یک سخنرانی به مناسبت آغاز کارش در دانشگاه آمستردام به استدلال پرداخته است.

در واقع، درآنجا براوئر برخلاف صورتگرایان وجود اعداد اصلی نامتناهی بزرگتر از$\aleph_۰$ را نمی پذیرد.

اما بعدها با تعدیل در برخی ازنظرات خود، اصول و مفاهیم جدیدی ( مفهوم « دنباله انتخاب» و اصل پیوستگی) را به شهود گرایی مورد نظرش افزود و با استفاده از آنها درسال ۱۹۱۸ نشان داد که $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ ( **N** به توان **N** ) ناشماراست.

## برهان کانتور برای ناشمارایی **R**

قضیه. اعداد حقیقی بین صفر و یک، یک مجموعه ناشماراست.

برهان. هر عدد حقیقی x بصورت $۰ < x < ۱$ را با بسط اعشاری آن بصورت ... ۰/ x۱x۲x۳ نشان می دهیم.

مثلاً ...۰/۱۶۶ = ۱/۶ ( یک ششم) و برای مواردی که بسط اعشاری عددی مانند ۰/ ۷۵ = ۳/۴ ( سه چهارم) محدود است، قرارمی گذاریم که از رقم آخر یکی کم کرده و رقم های بعدی را ۹ بنویسیم، پس ... ۳/۴ = ۰/ ۷۴۹۹

با این کار، دو عدد در فاصله ( ۰, ۱) مساوی هستند، اگر و فقط اگر رقمهای بسط اعشاری آنها یکی باشند.

حال فرض کنید که مجموعه نامتناهی ( ۰, ۱) شمارا باشد. آنگاه یک تناظر یک به یک بین اعداد طبیعی و اعداد حقیقی فاصله ( ۰, ۱) برقرار است. یعنی ( ۰, ۱) ~ f : **N** .

حال می توانیم تمام عناصر ( ۰, ۱) را بصورت زیر مرتب کنیم:

f (۱) = ۰/ a۱۱ a۱۲ a۱۳ ...

f (۲) = ۰/ a۲۱a۲۲ a۲۳ ...

f (۳) = ۰/ a۳۱a۳۲ a۳۳ ...

.

.

f (k) = ۰/ ak۱ ak۲ ak۳ ...

.

.

.

( فهرست ۱)

اکنون عدد ( ۰, ۱) T∈ را چنان می سازیم، که با هیچ یک از f (k) ها برابر نباشد. عدد ... T = ۰/ t۱ t۲ t۳ را چنین تعریف می کنیم:

برای هر k∈ **N** ، اگر a kk ≠ ۳ آنگاه t k = ۳ و اگر a kk = ۳ آنگاه t k = ۱ .

بدیهی است که T عددی بین صفر و یک است، اما T ≠ f (۱) زیرا t۱ ≠ a۱۱ و T ≠ f (۲) زیرا t۲ ≠ a۲۲ و ... ،

و در حالت کلی T ≠ f (k) زیرا به ازای هر k∈ **N** داریم t k ≠ a kk .

بنابراین ( ۰, ۱) = ( **N** ) T ∉ f ، که یک تناقض است، زیرا برخلاف فرض قبلی ما مبنی بر شمارای نامتناهی بودن ( ۰, ۱) می باشد.

با نشان دادن این تناقض، کانتور نتیجه می گیرد که فرض شمارا بودن اعداد حقیقی بین صفر و یک نادرست بوده و لذا مجموعه اعداد حقیقی که متناظر با اعداد حقیقی فاصله ( ۰, ۱) می باشد، ناشماراست. به این ترتیب، اثبات کانتور به پایان می رسد.

روشی که دراثبات قضیه بکار رفته، روش قطری کانتور نامیده می شود، زیرا ارقام عدد ... T = ۰/ t۱ t۲ t۳ ( که آن را عدد قطری می نامیم) براساس قطر اصلی ... , a۱۱ , a۲۲ , a ۳۳ تشکیل شده اند.

## چالش با برهان کانتور

لِم برهان کانتور چنین است: دستور ساخت عدد قطری T ، بر $\aleph_۰$ عدد حقیقی اعمال می شود و این دستور ساخت طوری است که عددی که ساخته می شود با هیچ کدام از اعداد حقیقی که از روی آنها ساخته می شود، مساوی نیست و چون اعداد حقیقی اولیه متناظر با اعداد طبیعی فرض شده اند، لذا هیچ عدد طبیعی ای با عدد ساخته شده، متناظرنیست.

چالش با این برهان ازاین قراراست:

(۱) عدد قطری T دست نیافتنی است و ساخت « کامل» T از روی $\aleph_0$ عدد حقیقی ممکن نیست، زیرا پایانی برای $\aleph_0$ عدد حقیقی متصور نیست. وجود T وابسته به حصول $\aleph_0$ عدد حقیقی است و چون حصول $\aleph_0$ عدد حقیقی، امری نامتناهی است، لذا وجود T نامعین می شود و درنتیجه می توان وجود آن را انکار کرد.

( ۲) اما اگر وجود عدد قطری T را بپذیریم، یعنی وجود آن را با ارائه روشی برای ساخت آن یکی بدانیم، دراینصورت با توجه به روندی که آن را « شیفت شمارشی» Counting shift می نامیم، می توانیم T را نیز بشماریم.

تابلوی ۱ این روند را نشان می دهد. در این تابلو $k \in \mathbf{N}$ و $f(k) = x_k$ یک عدد حقیقی است. شیفت شمارشی برای هر $x_k$ نشان داده شده است. بعبارت دیگر، عدد قطری T ، « جذب» روند شمارش اعداد حقیقی اولیه می شود.

$$\begin{array}{cccccc} x_۱ & x_۲ & x_۳ & x_۴ & \ldots \rightarrow & T \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \ldots & \end{array}$$
( برطبق دستورمعین ساخت T )

$$\begin{array}{cccccc} x_۱ & x_۲ & x_۳ & x_۴ & \ldots \rightarrow & T \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & \ldots & ۱ \end{array}$$
( شیفت شمارشی)

تابلوی ۱: پیکانها صرفاً شمارش را منعکس می کنند.

اعتباراین روند، براساس قضیه $\aleph_0 = \aleph_0 + ۱$ می باشد. دربرهان کانتور بطور ضمنی، $\aleph_0$ ' اندازه ای' با حدود معین فرض شده است، که می توان بطور مطلق و یکتا به همان اندازه از اعداد حقیقی« برداشت» کرد. اما قضیه $\aleph_0 = \aleph_0 \times \aleph_0$ نشان می دهد که چنین فرضی بی اعتبار است، زیرا $\aleph_0$ را می توان بصورت $\aleph_0 \times \aleph_0$ بیان کرد.

(۳) اساساً برهان خلف reductio ad absurdum تنها یک حالت مخالف حکم را رد می کند و همیشه حکم را اثبات نمی کند، زیرا امکان وجود حالت سوم یا حالتهای ممکن دیگر را رد نمی کند، که این موارد نیزمی بایست رد شوند تا نهایتاً حکم اثبات گردد.

برهان کانتور مبتنی بر خلف $\aleph_0$ بودن عدد اصلی مجموعه ی اعداد حقیقی است. اما ابتداء باید پرسید کدام $\aleph_0$ از اعداد حقیقی برای ساختن عدد قطری T بکار می رود؟

برای مثال، عدد اصلی مجموعه ی اعداد زوج که زیرمجموعه ای است از اعداد طبیعی، $\aleph_0$ است و اگر اعداد حقیقی ای که متناظر با مجموعه اعداد زوج درنظر گرفته می شوند، برای ساختن عدد قطری T بکار رود، موجه خواهد بود. دراینصورت، هرعدد فرد یک « فضای خالی یا Gap» محسوب می شود که عدد T ساخته شده، می تواند با یکی از اعداد فرد متناظر شود. چنین روندی را « جایگیری در یک فضای خالی» می نامیم.

می توانیم از یک Gap برای شمارش T در برهان کانتوراستفاده کنیم( تابلوی ۲):

$$\begin{array}{cccccccc} x_۱ & x_۲ & x_۳ & T & x_۵\,(= x_۴) & x_۶\,(= x_۵) & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & \ldots \end{array}$$

( تابلوی ۲)

نمی توان نتیجه گرفت که $x_۴ = x_۶$ زیرا ۴ یک Gap در مجموعه نامتناهی $\{۱, ۲, ۳, ۵, ۶, \ldots\}$ با عدد اصلی $\aleph_0$ می باشد که متناظر با اعداد حقیقی ای است که برای ساخت عدد T مفروض است.

کانتور اعداد حقیقی را بطور مطلق با کوچکترین عدد ترتیبی ordinal number همتوان $\mathbf{N}$ فهرست کرده است( کوچکترین عدد ترتیبی همتوان مجموعه اعداد طبیعی را معمولاً با امگا، ω ، نشان می دهند و عدد اصلی اعداد طبیعی را می توان کوچکترین عدد ترتیبی ازمجموعه ی تمام اعداد ترتیبی مجموعه های همتوان $\mathbf{N}$ تعریف کرد.) درصورتی که وجود عدد قطری T مؤید آن است که نمی توان اعداد حقیقی را با کوچکترین عدد ترتیبی همتوان $\mathbf{N}$ یا حتی فراتر از آن با هر عدد ترتیبی همتوان $\mathbf{N}$ « بطورمطلق» فهرست کرد، زیرا بزرگترین عدد ترتیبی همتوان $\mathbf{N}$ وجود ندارد، لذا درصورتی که درهر مرحله تعداد اعداد قطری ساخته شده، ازعدد ترتیبی مجموعه ی همتوان $\mathbf{N}$ که برای فهرست اولیه بکار رفته، فراتر رود( لازم به ذکراست که این عدد ترتیبی، عضوی ازمجموعه ی خوشترتیب well-ordered set تمام اعداد ترتیبی مجموعه های همتوان $\mathbf{N}$ می باشد.)، این اعداد قطری همراه با اعداد حقیقی فهرست شده، قابل اندراج و تناظر با اعضاء مجموعه ی همتوان $\mathbf{N}$ متفاوتی، با عدد ترتیبی بزرگتری می باشند.

یادآوری می شود که مجموعه های همتوان با مجموعه ی اعداد طبیعی می توانند اعداد ترتیبی متفاوتی بسته به نحوه ی خوشترتیبی داشته باشند، اما عدد اصلی همه آنها $\aleph_0$ است.

(۴) در برهان کانتور، بظاهرعدد قطری T ساختنی است، اما درواقع اساس آن مبتنی بر اصل انتخاب axiom of choice است.

ارقام پس ازاعشار هر عدد حقیقی واقع درفهرست ۱ را می توان مجموعه ای از ارقام درنظر گرفت که ازهریک ازاین مجموعه ها عددی انتخاب می شود که حاصل این انتخاب ها، مجموعه ای از ارقام است که روش ساخت عدد T طبق قاعده ی معین، بر آنها اعمال می شود.

این مجموعه درفهرست ۱ عبارت است از: $A = \{ a_{۱۱},\ a_{۲۲},\ a_{۳۳}, \ldots \}$

همانطور که می دانیم، اصل انتخاب منجربه نتایج وجودی محض می شود، زیرا « وجود» مجموعه ی مبتنی بر تابع انتخاب choice function را تصدیق می کند. به این ترتیب، وجود عدد قطری T دراین برهان مبتنی بر وجود مجموعه ی نامتناهی A است که ازاصل انتخاب نتیجه می شود و دستور ساخت عدد قطری T برای بدست آوردن مجموعه ی ارقام آن، برهرعضو از A بصورت تابعی ازمجموعه A - برای مثال به مجموعه { ۳, ۱} دربرهان مذکور- اعمال می شود.

اما امکان بی نهایت مرتبه تکرار این دستور( برای مثال، این دستور دربرهان مذکور عبارت است از: برای هر $k \in \mathbf{N}$ ، اگر $a_{kk} \neq ۳$ آنگاه $t_k = ۳$ و اگر $a_{kk} = ۳$ آنگاه $t_k = ۱$ . که $t_k$ نماینده ی ارقام عدد قطری T در حالت کلی است.) و عدم توقف آن یا نفی امکان عمل نکردن آن حداقل در یک مورد- برای بدست آوردن مجموعه ی ارقام پس ازاعشارعدد قطری T- تصریح نشده است.

آیا بی نهایت مرتبه تکرار کاربرد دستور ساخت عدد قطری امکان پذیر است؟

تابعی که ازمجموعه A به مجموعه { ۳, ۱} تعریف می شود، « تابع ساخت» می نامیم. اگراین تابع حداقل در یک عضو ازمجموعه A یعنی یک $a_{kk}$ تعریف نشده باشد، دراینصورت $a_{kk}$ که نتیجه ی تابع انتخاب از فهرست اعداد حقیقی است، می تواند یکی از ارقام عددی باشد که با عدد قطری T مساوی( یا اینهمان) است.

اینجا این نکته مطرح است که عدد قطری درمجموعه ی اعداد حقیقی که برای ساخت آن بکار رفته است، « تعریف پذیر» نیست، اما این بدان معنی نیست که T نمی تواند عضوی ازاین مجموعه باشد: عدد قطری به عنوان عضوی ازاین مجموعه نمی تواند درساخت خود شرکت نماید، زیرا خود- اینهمانی آن نقض می شود.( دربخش های آینده به این موضوع ، بیشترخواهیم پرداخت.)

ازاینرو، $t_k$ از روی « k امین شرکت کننده درساخت عدد قطری T » که با $k + ۱$ درمجموعه شمرده می شود، ساخته خواهد شد و T درمجموعه با k شمرده شده اما درساخت خود شرکت نمی کند، که این همان مفهوم Gap دراعداد حقیقی فهرست شده، است.( رجوع کنید به تابلوی ۲)

(۵) بطور خلاصه، اگر وجود عدد قطری را با توجه به چالش های (۱) و(۴) فوق الذکر انکارنماییم، دراینصورت صدق شمارایی مجموعه ی اعداد حقیقی را پذیرفته ایم، اما اگر وجود عدد قطری را بپذیریم یا بعبارت دیگر وجود آن را با ارائه روشی( یا دستوری) برای ساخت آن برمبنای فرآیندی نامتناهی یکسان بدانیم، آنگاه درحالت کلی نشان می دهیم که با توجه به موارد (۲) و(۳) فوق الذکر، خلف برهان کانتور که شمارایی مجموعه اعداد حقیقی است، مستلزم تناقض نیست و وجود اعداد قطری مانعی برای شمارش $\mathbf{R}$ نیست، اما برای شمارش آن با وضعی روبرو می شویم که پذیرش ناشمارایی $\mathbf{R}$ نیز قابل قبول است.

برهان. با تغییر در« ترتیب» order قرارگرفتن اعداد حقیقی درفهرست ۱ و با تغییردرتابع ساخت که منجر به تغییر در « روش ساخت» عدد قطری می شود، می توانیم تعداد نامتناهی عدد قطری بدست آوریم.

اگرازچند ترتیب متفاوت، که برای فهرست کردن اعداد حقیقی فاصله ( ۱, ۰) بکارمی رود، عدد قطری یکسانی بدست آوریم، دراین موارد عدد قطری یکبار شمرده خواهد شد.

ازهرجفت ازاعداد طبیعی n رقمی می توان ۲ دستور ساخت ارائه کرد و هرعدد طبیعی یک رقمی یا دو رقمی یا سه رقمی یا ... را می توان در دستور ساخت بکار برد. به این صورت که اگر اعداد $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ و $a_{۳۳}$ و ... $a_{kk}$ و ... ( اعضاء مجموعه A) در برهان کانتور را با تغییری مناسب، علاوه بر اعداد یک رقمی، اعداد دو رقمی یا سه رقمی یا ... n رقمی درنظربگیریم، برای مثال داریم:

اگر $a_{kk} \neq ۳۴$ آنگاه $t_k = ۳۴$ و اگر $a_{kk} = ۳۴$ آنگاه $t_k = ۲۸$ .

لذا تعداد روش های ساخت حاصل از اعداد طبیعی n رقمی برابر است با:

$$\frac{p!}{(p - 2)!} = p(p - 1)$$

که p تعداد ارقام n رقمی در مجموعه اعداد طبیعی است.( ! نشان فاکتوریل)

برای مثال، از روی اعداد صفر تا ۹ ، $۱۰ \times ۹ = ۹۰$ دستور ساخت بدست می آید.

اگر هر دو این حالات کلی، یعنی تغییر در فهرست کردن اعداد حقیقی و تغییر در روش ساخت عدد قطری، را درنظربگیریم، تمامی اعداد قطری را که با در دست بودن $\aleph_0$ عدد حقیقی اولیه بصورت $f(k)$ ، $k \in \mathbf{N}$ بدست می آید، می توان به این شکل مرتب کرد( تابلوی ۳):

$$
\begin{array}{cccccc}
T^{۱۱}_{۱} \rightarrow & T^{۱۱}_{۲} & T^{۱۱}_{۳} \rightarrow & T^{۱۱}_{۴} & T^{۱۱}_{۵} & \ldots \\
& \swarrow \quad \nearrow & & \swarrow & & \\
T^{۱۲}_{۱} & T^{۱۲}_{۲} & T^{۱۲}_{۳} & T^{۱۲}_{۴} & T^{۱۲}_{۵} & \ldots \\
\downarrow \quad \nearrow & & \swarrow & & & \\
T^{۱۳}_{۱} & T^{۱۳}_{۲} & T^{۱۳}_{۳} & T^{۱۳}_{۴} & T^{۱۳}_{۵} & \ldots \\
& \swarrow & & & & \\
T^{۱۴}_{۱} & T^{۱۴}_{۲} & T^{۱۴}_{۳} & T^{۱۴}_{۴} & T^{۱۴}_{۵} & \ldots \\
\downarrow \quad \nearrow & & & & & \\
T^{۱۵}_{۱} & T^{۱۵}_{۲} & T^{۱۵}_{۳} & T^{۱۵}_{۴} & T^{۱۵}_{۵} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

( تابلوی ۳)

در $T^{ab}_{c}$ ، a مرتبه اعداد حقیقی فهرست شده( با ادامه مطلب، منظوراز a روشن تر می شود.)، b شماره ی روش ساخت و c شماره ترتیب مورد نظر برای فهرست کردن می باشد.

برای مثال، درمورد عدد قطری $T^{۱۲}_{۴}$ ، ۲ نشان دهنده ی دومین روش ساخت عدد قطری، ۱ نشانگر اعداد حقیقی اولیه که برای فهرست شدن فرض شده اند و ۴ نشانگر چهارمین ترتیب برای فهرست کردن اعداد حقیقی می باشد.
این مطلب را با یک مثال عددی، روشن تر می کنیم:

| ( فهرست ۳) | ( فهرست ۲) |
|---|---|
| $x_۱ =$ ۰/ ۵۶۲ ... | $x_۱ =$ ۰/ ۳۷۳ ... |
| $x_۲ =$ ۰/ ۸۱۹ ... | $x_۲ =$ ۰/ ۵۶۲ ... |
| $x_۳ =$ ۰/ ۳۷۳ ... | $x_۳ =$ ۰/ ۸۱۹ ... |
| . | . |
| . | . |

در فهرست ۲، با فرض کردن اعداد ۳ و ۱( طبق برهان کانتور که قبلاً ذکر گردید) برای ساخت عدد قطری که به فرض، اولین روش ساخت در نظر گرفته می شود، و ترتیب مربوطه که اولین ترتیب فرض می شود، عدد قطری ... $T^{۱۱}_{۱} =$ ۰/۱۳۳ را بدست می آوریم. و در فهرست ۳ با همان اعداد حقیقی اولیه ولی با ترتیبی متفاوت که دومین ترتیب فرض می شود، و با همان روش ساخت، عدد قطری ... $T^{۱۱}_{۲} =$ ۰/ ۳۳۱ بدست می آید.
اعداد تابلوی ۳ را می توان از روی جهت پیکانها شمارش کرد و بصورت: $T^{۱۱}_{۱}\,,\ T^{۱۱}_{۲}\,,\ T^{۱۲}_{۱}\,,\ T^{۱۳}_{۱}\,, \ldots$ نوشت، که هر T با یک عدد طبیعی شمرده می شود. لذا درتابلوی ۳، عدد اصلی اعداد قطری ساخته شده، $\aleph_0$ است.
دراینجا ممکن است استدلال شود که عدد اصلی اعداد قطری در یک ساخت معین، بزرگتر از $\aleph_0$ است. این استدلال چنین است:
ارقام پس ازعلامت اعشار هر عدد قطری، یک تابع ازمجموعه ی اعداد طبیعی به یک مجموعه ی ۲ عضوی در یک روش ساخت معین می باشد. برای مثال، در اولین دستور ساخت، مجموعه ی { ۳, ۱} مطرح است.
ازطرفی، تعداد عضوهای « مجموعه همه ی این توابع متمایز» که نمایانگر ارقام پس از اعشار همه ی اعداد قطری متمایز در یک ساخت معین می باشد، عبارت است از: $۲^{\aleph_0}$ که بزرگتر از عدد اصلی $\aleph_0$ است.

نفی استدلال فوق، پایه اساسی این برهان است. دراین استدلال دو نکته وجود دارد:

$\aleph_0$

۱) عدد اصلی $2^{\aleph_0}$ بزرگتر از $\aleph_0$ است.   ۲) نحوه تعیین تمایز دو عدد قطری .
نکته اول استدلال مبتنی بر یکی از قضایای کانتوراست. دراین قضیه که به قضیه کانتورمشهوراست، وی ثابت می کند که عدد اصلی یک مجموعه ازعدد اصلی مجموعه تمام زیرمجموعه های آن، کوچکتراست. یکی ازنتایج این قضیه، بزرگتر بودن $2^{\aleph_0}$ از $\aleph_0$ است.
این قضیه درمورد مجموعه های متناهی صادق است، اما دربخش آخر ازاین فصل نشان داده خواهد شد که درمجموعه های نامتناهی، حکم به تساوی یا کوچکتر بودن عدد اصلی یک مجموعه نامتناهی از عدد اصلی مجموعه همه زیرمجموعه های آن، تصمیم ناپذیراست.
نکته دوم، نحوه تعیین تمایز دوعدد قطری یا به طریق اولیٰ تعیین تمایز توابع ذکر شده برای اعداد قطری دراستدلال فوق است.
دراین استدلال، ارقام پس ازاعشار درهرعدد قطری، یک تابع ازمجموعه اعداد طبیعی به یک مجموعه دوعضوی است. درچنین توابعی، درهرعدد طبیعی معینی می توان تمایز همه ارقام عدد قطری حاصل ازیک تابع را از تابع دیگر از روی اعداد طبیعی کوچکتر ازآن مشخص نمود، اما نمی توان نتیجه گرفت که درصورت یکسان بودن ارقام تا یک عدد طبیعی معین، تساوی مقادیر تابع درهمه اعداد طبیعی « پس ازآن» نیز صادق است.

بعبارت دیگر، مرزتمایز دراین توابع، نامعین است. لذا حکم به $2^{\aleph_0}$ برای عدد اصلی اعداد قطری، « قطعیت» ندارد.
استدلال مشابهی ممکن است درمورد عدد اصلی ترتیب های حاصل از $\aleph_0$ عدد حقیقی به عنوان تعداد همه ی توابع دو سویی Bijective ازمجموعه ی اعداد طبیعی روی خود این مجموعه مطرح شود، به این معنی که تعداد این توابع بزرگتر از $\aleph_0$ است. دراینجا نیز پاسخ لازم، مشابه حالت قبل است.
پس ازروشن ساختن این نکات اساسی، ادامه برهان چنین است:
اعداد قطری تابلوی ۳ را می توان با اعداد حقیقی اولیه فهرست کرد و به همین ترتیب، اعداد قطری جدیدی را بدست آورد، زیرا پذیرفته ایم که ساختن اعداد قطری، عین وجود آنهاست.
دراین مرحله، اعداد قطری « اولیه» و اعداد حقیقی اولیه مجموعاً اعداد حقیقی« ثانویه» را برای بدست آوردن اعداد قطری جدید تشکیل می دهند که با توجه به اینکه عدد اصلی هردو $\aleph_0$ است و $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$ ، لذا عدد اصلی اعداد حقیقی ثانویه نیز $\aleph_0$ است. به عبارت دیگر، اعداد قطری اولیه « جذب» اعداد حقیقی اولیه شده و شمارش می شوند و به این ترتیب قطری بودن خود را « ازدست می دهند.» این حالت نتیجه ی اجتناب ناپذیر قبول این امر است که ساخته شدن عدد قطری عین وجود آن است.

برای اندیس گذاری، اعداد قطری جدید را که از روی اعداد حقیقی « ثانویه» بدست می آیند با $T^2$ نشان می دهیم. این اعداد قطری جدید نیزاز روی انواع روش های ساخت و با تغییر در ترتیب فهرست شدن اعداد حقیقی « ثانویه» بدست می آیند و لذا می توان مشابه با تابلوی ۳ آنها را مرتب نمود و درنهایت به این صورت شمارش کرد:

$$T_1^{21},\ T_2^{21},\ T_1^{22},\ T_1^{23},\ T_2^{22},\ \dots$$

این اعداد قطری نیز با اعداد حقیقی ثانویه، مجموعاً اعداد حقیقی « ثالثی» را تشکیل می دهند که عدد اصلی آن با توجه به مطالب فوق $\aleph_0$ است.
با ادامه این روش و با درنظر گرفتن اعداد حقیقی اولیه بصورت $x^1,\ x^2,\ x^3, \dots$ یا $f(k) = x^k$ ، $k \in \mathbf{N}$ می توان همه اعداد حقیقی حاصله را در حالت کلی بصورت تابلوی ۴ مرتب کرد:

$$\begin{array}{ccccc}
x^1 \rightarrow & x^2 & x^3 \rightarrow & x^4 & \dots \\
\swarrow & & \nearrow & \swarrow & \\
T_1^{11} & T_2^{11} & T_1^{12} & T_1^{13} & \dots \\
\downarrow \quad \nearrow & \swarrow & & & \\
T_1^{21} & T_2^{21} & T_1^{22} & T_1^{23} & \dots \\
\swarrow & & & & \\
T_1^{31} & T_2^{31} & T_1^{32} & T_1^{33} & \dots \\
\downarrow & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

( تابلوی ۴)

در شکل ۴، ردیف افقی دوم از اعمال روش های ساخت براعداد حقیقی ردیف اول بدست می آید و ردیف افقی سوم ازاعمال روش های ساخت بر مجموعه اعداد حقیقی ردیف افقی اول و دوم بدست می آید و به همین ترتیب ادامه می یابد.

با شمارش اعداد تابلوی ۴ از روی پیکانها داریم:

$$x^1,\ x^2,\ T_1^{11},\ T_1^{21},\ T_2^{11},\ x^3,\ x^4,\ \dots$$

که این اعداد را می توان فهرست نمود و اعداد قطری « مرتبه بالاتری» را بدست آورد، که اگراین اعداد قطری را با P نمایش دهیم، با روشهایی که تابلوی ۴ را بدست آوردیم، تابلوی ۵ حاصل می شود:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x^1 & \rightarrow & x^2 & & T_1^{11} & \rightarrow & T_1^{21} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
P_1^{11} & & P_2^{11} & & P_1^{12} & & P_1^{13} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & \\
P_1^{21} & & P_2^{21} & & P_1^{22} & & P_1^{23} & & \cdots \\
 & & & & & & & & \\
P_1^{31} & & P_2^{31} & & P_1^{32} & & P_1^{33} & & \cdots \\
. & & . & & . & & . & & \\
. & & . & & . & & . & &
\end{array}
$$

( تابلوی ۵)

دراین تابلو نیز قاعده حاکم بر تابلوی ۴ صدق می کند، به این ترتیب که اعداد واقع در هر ردیف افقی از روی تمامی اعداد ردیف های بالاتر از خود ساخته می شود. اما نکته حائز اهمیت درتابلوی ۵ این است که برای مثال در مورد $P_1^{21}$ عدد « ۲» نشان می دهد که این عدد قطری از روی فهرست کردن اعداد حقیقی ردیف های اول و دوم بدست آمده است.

بعبارت دیگر، این دو ردیف مجموعاً نسبت به $P_1^{21}$ اعداد حقیقی ثانویه هستند که $P_1^{21}$ از روی آنها ساخته می شود. عدد « ۱» در بالای $P_1^{21}$ نشان دهنده ی شماره روش ساخت است که شماره های روش های ساخت در همه موارد ثابت است. عدد « ۱» در پایین $P_1^{21}$ نشان دهنده ی

شماره ی ترتیب مورد نظر برای اعدادی است که $P_1^{21}$ از روی آنها ساخته می شود. لذا « ۲» و « ۱» در $P_1^{21}$ و $T_1^{21}$ نشانگری متفاوتی دارند و نباید نقش آنها را خلط نمود. این نکته در سایرموارد نیز بایستی مورد توجه قرار گیرد.
اگر تابلوی ۵ را درجهت پیکانها شمارش نماییم، این ترتیب را خواهیم داشت:

$$x^1 \;,\; x^2 \;,\; P_1^{11} ,\; P_1^{21} ,\; P_2^{11} \;,\; T_1^{11} ,\; T_1^{21} , \ldots$$

با فهرست کردن این اعداد و کاربرد روش های فوق الذکر، اعداد قطری مرتبه بالاتری مانند e بدست می آیند که مشابه با موارد فوق به این صورت شمارش می شوند:

$$x^1 \;,\; x^2 \,,\; e_1^{11} \;,\; e_1^{21} \;,\; e_2^{11} \;,\; P_1^{11} ,\; P_1^{21} , \ldots$$

که مسلماً « T ها » نیز با ادامه شمارش درآن ظاهرخواهند شد.
این روند بطور نامتناهی ادامه می یابد و درهر مرحله اعداد قطری مراتب بالاتری بدست می آیند. اکنون نشان می دهیم که ازشمارش هر مرحله، الگوهای ثابتی بدست می آیند که اساسی است. از روی شمارش ۳ مرحله از ساخته شدن اعداد قطری که در بالا اندیس گذاری گردید، داریم:

| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^1$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $x^5$ | $x^6$ | $x^7$ | … |
| $x^1$ | $x^2$ | $T_1^{11}$ | $T_1^{21}$ | $T_2^{11}$ | $x^3$ | $x^4$ | … |
| $x^1$ | $x^2$ | $P_1^{11}$ | $P_1^{21}$ | $P_2^{11}$ | $T_1^{11}$ | $T_1^{21}$ | … |
| $x^1$ | $x^2$ | $e_1^{11}$ | $e_1^{21}$ | $e_2^{11}$ | $P_1^{11}$ | $P_1^{21}$ | … |
| . | . | . | . | . | . | . | |
| . | . | . | . | . | . | . | |
| . | . | . | . | . | . | . | |

( تابلوی ۶ )

در تابلوی ۶، در ردیف افقی اول، اعداد طبیعی واقع اند که برای شمارش اعداد حقیقی واقع دراین مراحل بکارمی روند.
ردیف افقی دوم شامل اعداد حقیقی اولیه است. ردیف افقی سوم شامل ردیف افقی دوم و تمامی اعداد قطری ساخته شده ازاعداد ردیف دوم است و ردیف افقی چهارم شامل اعداد حقیقی ردیف دوم و سوم و تمامی اعداد قطری ساخته شده از روی ردیف های دوم و سوم است و الی آخر.
بعبارت دیگر، هر ردیف افقی شامل تمامی اعداد حقیقی ردیف های بالاتر ازخود بعلاوه ی اعداد قطری جدیدی است که از روی آنها ساخته می شوند.
دراین تابلو ملاحظه می شود که، هنگامی که یک ردیف افقی معین از اعداد حقیقی با اعداد طبیعی شمرده می شود، برای مثال، اعداد دارای اندیس های ( $^{۱۱}_{۱}$ ) در تمامی ردیف های افقی از الگوهای مشابهی پیروی می کنند. این امر در مورد اعداد حقیقی اولیه یعنی ... , $x^{۳}$ , $x^{۲}$ , $x^{۱}$ و اعداد قطری با اندیس های دیگر نیز صدق می کند.
اکنون این مطلب را روشن تر می کنیم: ابتداء برای یکدست کردن نشانه گذاری در حالت کلی، T ها و P ها و e ها و ... را که مطابق با «مرتبه های» ساخت اعداد قطری هستند، به ترتیب بصورت T ۱ ها و T ۲ ها و T ۳ ها و ... نشان می دهیم.
اکنون سه مورد از الگوهای ثابت اعداد طبیعی را در تابلوی ۷ نشان می دهیم:

$$qT_{۱}^{۱۱} , \ldots , ۳T_{۱}^{۱۱} , ۲T_{۱}^{۱۱} , ۱T_{۱}^{۱۱} , x^{۳} , x^{۶} , x^{۱۶} , \ldots \leftrightarrow ۳ , ۶ , ۱۶ , ۱۲۱ , \ldots$$

$$qT_{۱}^{۲۱} , \ldots , ۳T_{۱}^{۲۱} , ۲T_{۱}^{۲۱} , ۱T_{۱}^{۲۱} , x^{۴} , x^{۷} , x^{۲۸} , \ldots \leftrightarrow ۴ , ۷ , ۲۸ , \ldots$$

$$qT_{۲}^{۱۱} , \ldots , ۳T_{۲}^{۱۱} , ۲T_{۲}^{۱۱} , ۱T_{۲}^{۱۱} , x^{۵} , x^{۱۵} , x^{۱۲۰} , \ldots \leftrightarrow ۵ , ۱۵ , ۱۲۰ , \ldots$$

.

.

( تابلوی ۷ )

از تابلوی ۷، نکاتی جهت شمارش اعداد حقیقی قابل استنتاج است که به این شرح می باشد:
۱) در تابلوی ۷، درهر ردیف افقی اندیس های x ها از روی اعداد طبیعی همان ردیف قابل تعیین است. برای مثال در ردیف اول، x ها عبارتند از: ... , $x^{۱۲۱}$ , $x^{۱۶}$ , $x^{۶}$ , $x^{۳}$
ملاحظه می شود که مجموعه ی اعداد طبیعی واقع در هر ردیف افقی، یک زیرمجموعه ی نامتناهی ازمجموعه اعداد طبیعی است، لذا عدد اصلی آن $\aleph_0$ است و از طرف دیگر، عدد اصلی مجموعه اعداد حقیقی درهمان ردیف نیز $\aleph_0$ است، زیرا مجموعه ی اعداد حقیقی درهر ردیف، اجتماع زیرمجموعه ی نامتناهی ازاعداد حقیقی اولیه ( x ها با اندیس های معین) با عدد اصلی $\aleph_0$ و یک زیرمجموعه ی نامتناهی از اعداد قطری با اندیس های معین و با عدد اصلی $\aleph_0$ است.
تعداد ردیف ای افقی در تابلوی ۷ نامتناهی است و دراینجا تنها سه ردیف نشان داده شده است، لذا می توان اعداد حقیقی واقع درتمامی ردیف ها را فهرست نمود و مجدداً اعداد قطری جدیدی را بدست آورد، زیرا اصولاً پایانی برای ساختن اعداد قطری وجود ندارد، اما این امر به هیچ وجه مانع شمارش اعداد حقیقی نیست؛ زیرا همانطور که در تابلوی ۷ ملاحظه می شود ازمجموعه ی اعداد طبیعی، تعداد نامتناهی اززیرمجموعه های نامتناهی اعداد طبیعی با اشتراک تهی حاصل آمده است که هر ردیف افقی یک زیرمجموعه ازاعداد طبیعی را دربردارد،
لذا به همین منوال و به طریقی مشابه ازهریک از این زیر مجموعه های اعداد طبیعی درهر ردیف افقی، به تعداد نامتناهی زیرمجموعه های نامتناهی دیگری با اشتراک تهی قابل حصول است که اعداد قطری جدید با آنها شمرده می شوند، و این روند بطور نامتناهی ادامه می یابد.
اگر تناظر یک به یک نهایی را به دلیل این روند نامتناهی و پایان ناپذیر برای شمارش، همواره خارج ازدسترس تلقی کنیم، آنگاه می توانیم ناشمارایی **R** را بپذیریم، اگرچه شمارایی **R** قابل انکار نیست.
۲) اندیس q در تابلوی ۷، همواره یک عدد طبیعی و لذا معین است و مرتبه ی ساختی را که عدد قطری درآن قراردارد، نشان می دهد.
با مشخص کردن اندیس q، « بطور نسبی بالاترین» مرحله مورد شمارش معین می شود؛ منظور این است که اعداد حقیقی مرحله مورد شمارش بصورت یکی ازردیف های افقی از« تابلوی ۶» مشخص می شوند و هرT و هر x با اندیس معین که در یکی از ردیف های افقی تابلوی ۷ واقع می شود با یکی از اعداد طبیعی واقع درطرف راست همان ردیف شمرده می شود.
به این ترتیب، برای مثال درردیف اول از تابلوی ۷ اعداد حقیقی مورد شمارش دررابطه با یک q معین عبارت خواهند بود از:

$$qT_{۱}^{۱۱} , q-۱\,T_{۱}^{۱۱} , q-۲\,T_{۱}^{۱۱} , \ldots , q-(q-۱)\,T_{۱}^{۱۱} , x^{۳} , x^{۶} , x^{۱۶} , \ldots$$

برای مثال اگر $q = ۲$ باشد، اعداد حقیقی مورد شمارش، در ردیف چهارم از تابلوی ۶ واقع اند و لذا در ردیف اول از تابلوی ۷،

$۲T_{۱}^{۱۱}$ با ۳ و $۱T_{۱}^{۱۱}$ با ۶ و $x^{۳}$ با ۱۶ و $x^{۶}$ با ۱۲۱ شمرده می شوند و به همین ترتیب الی آخر؛ در سایر ردیف های تابلوی ۷ نیز همین قاعده حاکم است.
اما درهر ردیف افقی از تابلوی ۷، با افزایش q نسبت به قبل و در نتیجه تغییر در مرحله مورد شمارش که در تابلوی ۶ مشهود است و بعلت افزوده شدن اعداد قطری جدید می باشد، اعداد حقیقی مرحله قبل ازآن با اعداد طبیعی جدیدی در همان ردیف شمارش خواهند شد.

برای مثال، اگر q به ۳ تغییر نماید، این بار اعداد حقیقی مورد شمارش، در ردیف پنجم از تابلوی ۶ واقع می شوند و در ردیف اول از تابلوی ۷، $T^{11}_{1}$ ۳ با ۳ و $T^{11}_{1}$ ۲ با ۶ و $T^{11}_{1}$ ۱ با ۱۶ شمارش می شوند و $x^{3}$ ، $x^{6}$ ، $x^{16}$ و ... به ترتیب با سه عدد طبیعی که بعد از ۱۶ در ردیف اول از تابلوی ۷ واقع اند، شمارش می شوند و الی آخر.

بعبارت دیگر، آنچه در تابلوی ۷ نشان داده می شود، الگوهای شیفت شمارشی است. q بر طبق « ترتیب طبیعی » اعداد طبیعی افزایش می یابد، زیرا مراتب ساخت اعداد قطری نامتناهی است. لذا با ساخته شدن اعداد قطری جدید - و درنتیجه تغییر q - شمارش آنها مستلزم « شیفت شمارشی» نسبت به مرحله قبلی است که درابتدای فصل به آن اشاره گردید.

ازآنجایی که پایانی برای ساخته شدن اعداد قطری وجود ندارد، لذا با افزوده شدنهای پی در پی اعداد قطری جدید و ورود به مرحله جدید، شمارش اعداد جدید موجب شیفت شمارشی برای اعداد مرحله ی قبلی می شود.

حتی ازاین نیزمی توان فراتر رفت: اگرهمه اعداد حقیقی واقع در تمامی ردیف های این الگوها را فهرست کرده واعداد قطری جدیدی بدست آوریم، بازهم شیفت شمارشی از روی این الگوهای ثابت، تعیّن می پذیرد.

۳) الگوهای مذکور همچنین محل Gap ها را- که در ابتدای فصل به آنها اشاره گردید- بدست می دهند ومحل آنها را در گذر از یک مرحله از ساخت اعداد قطری به مرحله دیگر معین می کنند. اکنون این مطلب را روشن تر می کنیم:

برای مثال، اگر در تابلوی ۴ اعداد حقیقی اولیه ی کانتور را که از روی اندیس هایشان $x^{1}$ , $x^{2}$ , $x^{3}$ , ... شمارش شده اند، به عنوان مرحله اول مورد شمارش فرض نماییم و پس از آن اعداد قطری واقع در تابلوی ۴ را نیز همراه با اعداد حقیقی اولیه شمارش نماییم، داریم:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ... |
| ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | |
| $x^{1}$ | $x^{2}$ | $T^{11}_{1}$ | $T^{21}_{1}$ | $T^{11}_{2}$ | $x^{3}$ | ... |

( پیکانها صرفاً شمارش را منعکس می کنند.)

که با توجه به مفهوم Gap داریم: ( G به جای Gap )

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ... | | | | | | | | |
| ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | | | | | | | | | |
| $x^{1}$ | $x^{2}$ | G | G | G | $x^{3}$ | ... | → | $x^{1}$ | $x^{2}$ | $T^{11}_{1}$ | $T^{21}_{1}$ | $T^{11}_{2}$ | $x^{3}$ | ... |
| | | ↓ | ↓ | ↓ | | | | | | | | | | |
| | | برای $T^{11}_{1}$ ، | برای $T^{21}_{1}$ ، | برای $T^{11}_{2}$ | | | | | | | | | | |

( تابلوی ۸ )

آنچه در تابلوی ۸ نشان داده شده، محل Gap ها را نسبت به اعداد حقیقی اولیه کانتور ... , $x^{3}$ , $x^{2}$ , $x^{1}$ و در مرحله معینی از شمارش ملحوظ داشته است و سه G در تابلو پس از گذر از مراحل مختلف ساخت اعداد قطری بدست آمده است و نباید این مراحل را نادیده گرفت.

برای مثال در ساخت $T^{21}_{1}$ ، اجتماع مجموعه های { ... , $x^{3}$ , $x^{2}$ , $x^{1}$ } و { ... , $T^{12}_{1}$ , $T^{11}_{2}$ , $T^{11}_{1}$ } که دو ردیف افقی اول از تابلوی ۴ را تشکیل می دهند، شرکت داشته اند.

بیان غیر ریاضی مفهوم Gap چنین است:

هر عدد قطری یک عدد حقیقی است که از یک مجموعه ی ناشمارای نامتناهی معین ازاعداد حقیقی، تحت قاعده معینی ساخته می شود؛ اما خودش نمی تواند درساخت خودش شرکت نماید، زیرا اینهمانی identity با خودش را تحت این قاعده نفی خواهد کرد، یعنی خود- اینهمانی آن نقض می شود واین ممکن نیست.

بعبارت دیگر، عدد قطری عضوی ازمجموعه ی مذکوراست، اما درساخت خودش شرکت نمی کند. به این ترتیب، حکم به وجود آن پیش از دسترسی به آن از راهی ساختنی صورت می گیرد، لذا قبل از ساخت شمارش می شود.

۴) همانطور که قبلاً ذکر گردید، کانتور اعداد حقیقی را بطورمطلق با کوچکترین عدد ترتیبی همتوان **N** ( یعنی ω ) فهرست کرده است:

ω = ord { ۱ ,۲ ,۳ , ... } ( عدد ترتیبی ordinal number ) و با ساختن یک عدد قطری، نتیجه گیری نموده است که این عدد درفهرست اعداد حقیقی شمارش شده نیست و لذا اعداد حقیقی قابل شمارش نیستند.

اما باید توجه داشت که این مجموعه « تنها» مجموعه ی با عدد اصلی $\aleph_0$ نیست و بی شمارمجموعه با عدد اصلی $\aleph_0$ وجود دارد.

ازاینرو، براساس این نکته، مشکل کانتور در شمارش اعداد حقیقی که با ساخته شدن اعداد قطری پیش می آید، به این شرح برطرف می گردد:

اعداد حقیقی اولیه { ... , $x^{3}$ , $x^{2}$ , $x^{1}$ } بر اساس کوچکترین عدد ترتیبی همتوان **N** فهرست شده اند، لذا با هر مرحله از ساخته شدن اعداد قطری، اعداد جدید را همراه با فهرست اولیه درمجموعه ی دیگری با عدد ترتیبی بزرگتر ولی همتوان با **N** « قرار می دهیم.»

باید توجه داشت که مجموعه **N** تحت خوشترتیبی های متفاوت، عددهای ترتیبی متمایز دارد، اما عدد اصلی همه آنها $\aleph_0$ است.

برای مثال، اگر روی حاصلضرب دکارتی Cartesian product مجموعه های خوشترتیب well-ordered sets

$( A , \leq ) = \{ ۱ , ۲ \}$ و $( B , \leq ' ) = \{ ۱ , ۲ , ۳ , ... \}$ رابطه ی خوشترتیبی $( A \times B , \leq '' )$ را به این صورت تعریف کنیم:
اگر $a , b \in A$ و $a < b$ آنگاه برای هر $c$ و $d$ در $B$ ، $( a , c ) \leq '' ( b , d )$.
اگر $a = b$ و $c \leq ' d$ آنگاه $( a , c ) \leq '' ( b , d )$.
آنگاه داریم: $( A \times B , \leq '' ) = \{ ( ۱ , ۱ ) , ( ۱ , ۲ ) , ( ۱ , ۳ ) , ... , ( ۲ , ۱ ) , ( ۲ , ۲ ) , ( ۲ , ۳ ) , ... \}$

عدد ترتیبی A و B به ترتیب ۲ و $\omega$ است، عدد اصلی $( A \times B , \leq '' )$ ، $\aleph_0$ و عدد ترتیبی آن $\omega + \omega = \omega ۲ > \omega$ است.
اگر اعداد حقیقی اولیه را با قطعه ی $( ۱ , ۱ ) , ( ۱ , ۲ ) , ( ۱ , ۳ ) , ...$ از $( A \times B , \leq '' )$ که عدد اصلی آن $\aleph_0$ است، متناظر کنیم، آنگاه اعداد قطری ساخته شده از تمامی ترتیب ها و روش های ساخت از اعداد حقیقی اولیه ( به تابلوی ۳ رجوع نمایید.) با قطعه ی $( ۲ , ۱ ) , ( ۲ , ۲ ) , ( ۲ , ۳ ) , ...$ از $( A \times B , \leq '' )$ متناظرمی شود.
حال اگرهمه ی این اعداد را فهرست کرده و اعداد قطری جدیدی را ( رجوع کنید به ردیف افقی سوم از تابلوی ۴ ) بدست آوریم، آنگاه مجموعه خوشترتیب $( C \times B , \leq '' )$ ، $( C , \leq ) = \{ ۱ , ۲ , ۳ \}$ ، را مورد ملاحظه قرارمی دهیم که عدد ترتیبی آن بزرگتر از $( A \times B , \leq '' )$ می باشد: دراین صورت، قطعه ی $( ۳ , ۱ ) , ( ۳ , ۲ ) , ( ۳ , ۳ ) , ...$ از $( C \times B , \leq '' )$ با اعداد قطری جدید متناظر می شوند که دراین حالت عدد ترتیبی $( C \times B , \leq '' )$ عبارت است از: $\omega + \omega + \omega = \omega ۳ > \omega ۲$ و عدد اصلی آن $\aleph_0$ است و به همین نحو ادامه می یابد.

به این ترتیب با ساخته شدن هرمرحله ازاعداد قطری جدید به مجموعه ی همتوان **N** با عدد ترتیبی بزرگتر' منتقل می شویم ' ؛ ازآن جهت که ساخته شدن اعداد قطری بطور نامتناهی ادامه می یابد و مجموعه ی تمام اعداد ترتیبی همتوان **N** نیز نامتناهی است:

$$\{ \omega , \omega + ۱ , ... , \omega ۲ , \omega ۲ + ۱ , ... , \omega ۳ , \omega ۴ , ... , \omega^{۲} , \omega^{۳} , ... , \omega^{\omega} , ... , \omega^{(\omega^{\omega})} , ... , \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot}}}} , ... \}$$

همانطور که ملاحظه می شود، تناظر یک به یک نهایی همواره خارج از دسترس است، اما قابل انکار نیست، بنابراین، پذیرش شمارایی یا ناشمارایی **R** تصمیم ناپذیراست.
۵) از روی اعداد طبیعی به طریقی که در تابلوی ۹ مرتب شده اند، می توان زیرمجموعه های اعداد طبیعی واقع درهرردیف افقی از تابلوی ۷ را بدست آورد. اگرچه از روی تابلوی ۶ می توان آنها را بدست آورد ولی این روش آسانتر است:

```
۱  →  ۲     ۶  →  ۷     ۱۵    ۱۶    .
   ↙     ↗     ↙
۳     ۵     ۸     ۱۴    ۱۷    .
↓  ↗     ↙
۴     ۹     ۱۳    ۱۸    .
   ↙
۱۰    ۱۲    ۱۹    .
↓  ↗
۱۱    ۲۰    .

۲۱    .
```

( تابلوی ۹)

برای بدست آوردن هرعدد واقع در یک ردیف افقی ازتابلوی ۷، به تعداد عدد قبل ازآن درتابلوی ۷، ازستون اول از تابلوی ۹ شمارش نموده و به هرعددی رسیدیم، بطورمورب و موازی با پیکان مابین ۲ و ۳ در تابلوی ۹ بطرف بالا حرکت می کنیم و دراولین ردیف افقی ازتابلوی ۹، به عدد مطلوب دست می یابیم.
برای مثال، زیرمجموعه ی اعداد طبیعی واقع در ردیف اول افقی از تابلوی ۷، عبارتند از: $\{۳ , ۶ , ۱۶ , ...\}$
برای بدست آوردن عدد ۱۶، درستون اول از تابلوی ۹، به تعداد عدد ماقبل ۱۶، یعنی ۶، شمارش می کنیم و به عدد ۲۱ می رسیم و ازآنجا موازی با پیکان فوق الذکر بطرف بالا می آییم و در ردیف افقی اول به عدد ۱۶ می رسیم.
اگرهمه اعداد حقیقی واقع درتمام ردیف های افقی تابلوی ۷ را فهرست کرده و اعداد قطری جدیدی را بدست آوریم و این کار را بطور نامحدود تکرار کنیم، برای مثال ردیف افقی اول از تابلوی ۷ به این صورت درمی آید:

$$x^{۱۶} , x^{۶} , x^{۳} \,/\, {}^{۱}_{۱}T^{۱۱}_{۱} , {}^{۱}_{۲}T^{۱۱}_{۱} , {}^{۱}_{۳}T^{۱۱}_{۱} , ... \,/\, {}^{۲}_{۱}T^{۱۱}_{۱} , {}^{۲}_{۲}T^{۱۱}_{۱} , {}^{۲}_{۳}T^{۱۱}_{۱} , ... \,/\, {}^{۳}_{۱}T^{۱۱}_{۱} , {}^{۳}_{۲}T^{۱۱}_{۱} , {}^{۳}_{۳}T^{۱۱}_{۱} , ... \,/\, ...$$

( تابلوی ۱۰)

که در این صورت مجموعه اعداد $\{۳ , ۶ , ۱۶ , ...\}$ را می توان مشابه با تابلوی ۹ مرتب کرد( تابلوی ۱۱) و بی نهایت زیرمجموعه ازآن را در تابلوی ۱۲، به همان روشی که در بالا برای بدست آوردن همین مجموعه، توضیح داده شد، بدست آورد:

۳ → ۶    b → c    .
↙    ↗    ↙
۱۶    a    d    .
↓    ↗
۱۲۱    e    .

f    .
.

( تابلوی ۱۱)

۳, b , . , . . .
۱۶ , . , . , . . .
۱۲۱ , . , . , . . .
.   .   .   .

( تابلوی ۱۲)

( اعداد f , e , d , c , b , a بزرگ اند و تعیین آنها نیازبه محاسبات طولانی دارد.)

هر زیرمجموعه که شامل یک ردیف افقی از تابلوی ۱۲ می شود، با یک مجموعه ازاعداد حقیقی که بین دو خط مورب از تابلوی ۱۰ واقع است، متناظر می شود. همین شیوه بر هر ردیف افقی از تابلوی ۷ اِعمال می شود.
باید تاکید کرد که الگوهای ۱۰ و ۱۲، بازهم بطورنامحدود به همان روش قابل بسط هستند و برای هر فهرست از اعداد قطری جدید، اعداد طبیعی متناظر با آنها را بدست می دهند. این الگوها نشان می دهند که اگرچه نمی توان یک تناظر یک به یک نهایی را میان اعداد حقیقی و اعداد طبیعی بدست داد ، اما وجود چنین امری را هم نمی توان نفی کرد.
بنابراین، پذیرش شمارایی یا ناشمارایی **R** امری تصمیم ناپذیراست.
یادداشت: اندیس گذاری های ... , $x_3$ , $x_2$ , $x_1$ در برهان کانتور موجب اشتباه و اشکال شده اند.
دربرهان کانتور، این نحوه اندیس گذاری موجب شده که نتوان برای عدد قطری حاصل از این فهرست، اندیسی را که نماینده تناظر آن با یک عدد طبیعی است، درنظر گرفت؛ که ازآنجا کانتوراستنتاج می کند که هیچ عدد طبیعی ای با آن متناظر نیست و درنتیجه قابل شمارش بودن اعداد حقیقی امکان پذیرنیست.
اما این نحوه ی اندیس گذاری و استدلال بکار برده شده در رابطه با آن برای نفی شمارش پذیری اعداد حقیقی، مردود است. دربرهان کانتور، اندیس گذاری برای شمارش بکار رفته و چنین تعبیری موجب اشتباه شده است. دراینجا این نکته مطرح می شود که نقش اندیس گذاری چیست؟
پاسخ آن است که نقش اندیس گذاری، نشاندار کردن و شناسایی اعداد حقیقی است. برای مثال، $x_3$ نباید به این مفهوم باشد که این عدد حقیقی با عدد ۳ شمرده می شود یا متناظر با آن است. منظور از نشاندار کردن آن است که 'رد پای' یک عدد حقیقی معین را در مراحل مختلف شمارش برای رسیدن به تناظر نهایی، گم نکنیم.
به این ترتیب، $x_3$ یا $T_{12}^{11}$ در طی مراحل شمارش نماینده اعداد حقیقی معین و حاضری هستند.

## چالش با برهان دوم ناشمارایی **R** ( نقض اصل موضوع ددکیند)

برهان دیگری که برای اثبات ناشمارایی **R** ارائه می شود، براساس اصل موضوع بازه های تو در تو axiom of nested intervals است.
ابتداء برهان مذکور را به روش ریاضی بیان می کنیم و سپس به ایراد وارد برآن می پردازیم.
قضیه: **R** شمارش ناپذیراست.
برهان: فرض کنیم **R** شمارش پذیراست. دراین صورت تناظری یک به یک بین **R** و **N** وجود دارد. فرض می کنیم $n = 2m-1$ و $x_{2m-1} < x_{2m}$ ( $m$ عدد طبیعی و $x$ عدد حقیقی است.) دراینصورت بازه $(x_{2m-1}\ ,\ x_{2m})$ مجموعه ای بی پایان است.
عدد طبیعی $2m+1$ را کوچکترین عدد طبیعی $k$ می گیریم که در نامساوی های $k > 2m$ و $x_{2m-1} < x_k < x_{2m}$ صدق می کند و سپس $2m+2$ را کوچکترین عدد طبیعی $k$ می گیریم که در نامساوی های $k > 2m+1$ و $x_{2m+1} < x_k < x_{2m}$ صدق می کند.
براین اساس داریم: $x_{2m-1} < x_{2m+1} < x_{2m+2} < x_{2m}$
ملاحظه می شود که مجموعه اعداد واقع در بازه $[x_{2m+1}\ ,\ x_{2m+2}]$ جزئی از بازه $(x_{2m-1}\ ,\ x_{2m})$ است.
دراینصورت بازه های $[x_{2m+1}\ ,\ x_{2m+2}]$ به ازای $m \geq 1$ یک دنباله کاهشی از بازه های بسته و کراندار است. لذا بنا براصل فاصله های تو در تو( اگر یک دنباله کاهشی از فاصله های کراندار و بسته **R** در دست باشد، اشتراک آنها ناتهی است.) عدد $y$ متعلق به اشتراک این بازه ها وجود دارد که این عدد با یک عدد طبیعی مانند $z$ متناظر است، یعنی $y = x_z$ .
بزرگترین عدد طبیعی مانند $p$ را که در $p \leq z$ صدق می کند $n$ می نامیم، می توان نوشت: $n \leq z$ و $z < n+1$ .
اول فرض می کنیم که $n = 2m+1$ یعنی $z$ فرد باشد. دراینصورت داریم: $x_{2m+1} < x_z < x_{2m+2} < x_{2m}$ .
اما این نامساوی با تعریف عدد طبیعی $2m+2$ متناقض است، زیرا $z < 2m+2$ در $x_{2m+1} < x_z < x_{2m}$ صدق کرده است، که غیرممکن است، بنابراین $n \neq 2m+1$ .
حال فرض می کنیم که $n = 2m$ یعنی $z$ زوج باشد، دراینصورت $x_{2m-1} < x_{2m+1} < x_z < x_{2m}$ . اما این با تعریف عدد طبیعی $2m+1$ متناقض است، زیرا $z < 2m+1$ در $x_{2m-1} < x_z < x_{2m}$ صدق کرده است ، که امری ناممکن است، پس $n \neq 2m$ .
بنابراین، $z$ نه زوج است و نه فرد و این تناقض به معنی آن است که $z$ وجود ندارد و $y$ با هیچ عدد طبیعی متناظر نیست، که این هم خلاف فرض است. پس فرض درست نیست، یعنی **R** ناشمارا است.

***

بیان ساده وغیر ریاضی این برهان ازاین قراراست:
فرض می کنیم هرعدد حقیقی با یک عدد طبیعی متناظراست. از روی دنباله طبیعی اعداد طبیعی، بازه های زیر را تشکیل می دهیم:

$$[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2n-1}, x_{2n}], \dots$$

این بازه های بسته به نحوی هستند که هر بازه مشمول بازه ماقبل است و در درون آن واقع می شود. بنابراین، بازه $[x_1, x_2]$ اولین و بزرگترین بازه مفروض است و بازه های دیگر بر طبق روال مذکور در درون آن قرار می گیرند.
به غیر از بازه اول، ابتدای هر بازه مفروض مانند $[x_{2n-1}, x_{2n}]$ با کوچکترین عدد طبیعی $2n-1$ معین می شود که عدد حقیقی متناظر با آن را مابین اعداد حقیقی واقع در ابتداء و انتهای بازه ماقبل یعنی $[x_{2n-3}, x_{2n-2}]$ قرار می دهد.
مجدداً غیراز بازه اول، انتهای هر بازه مفروض یعنی $x_{2n}$ با کوچکترین عدد طبیعی $2n$ معین می شود که عدد حقیقی متناظر با آن را مابین اعداد حقیقی ابتدای بازه مفروض وانتهای بازه ماقبل یعنی $x_{2n-1}$ و $x_{2n-2}$ قرار می دهد.
برای مثال، $x_3$ بین $x_1$ و $x_2$ است و $3$ کوچکترین عدد طبیعی برای قرار گرفتن $x_3$ دراین فاصله است و $x_4$ بین $x_2$ و $x_3$ قرار می گیرد و $4$ کوچکترین عدد طبیعی برای قرار گرفتن $x_4$ دراین فاصله است.
علت تاکید بر کوچکترین عدد طبیعی آن است که چنین عددی بطور ضمنی تضمین می کند که، برای مثال، $x_3$ کوچکترین عدد حقیقی ممکن است که بلافاصله پس از $x_1$ مابین $x_1$ و $x_2$ واقع می شود و $x_4$ کوچکترین عدد حقیقی ممکن است که بلافاصله پس از $x_3$ مابین $x_3$ و $x_2$ قرار می گیرد.
ازاینجا به بعد اصل موضوع بازه های تو در تو مورد استفاده قرار می گیرد تا نشان داده شود که لااقل یک عدد حقیقی وجود دارد که نه با یک عدد طبیعی فرد متناظر می شود و نه یک عدد طبیعی زوج.
این اصل توسط کانتور جهت مسئله ی ساختن دستگاه اعداد حقیقی ارائه گردید و به « اصل موضوع کمال کانتور» نیز معروف است.
صورت ساده تر این اصل عبارت است از:
هر دنباله از پاره خطهای تو در تو که طول های آنها به صفر میل کند، نقطه مشترک یکتایی دارد.
این اصل موضوع را می توان برای ساختن دستگاه اعداد حقیقی مفروض گرفت. روش دیگری که برای ساختن اعداد حقیقی وجود دارد، موسوم به روش ددکیند یا روش بریدگیها است.( Cut method )
با شروع ازمفروضات این روش، می توان این اصل موضوع را به صورت یک قضیه بیان کرد و اثبات نمود.
به این ترتیب، براساس اصل بازه های تو در تو یک عدد حقیقی $y$ وجود دارد که متعلق به بازه اشتراک همه بازه های فوق است. حال این سؤال مطرح می شود که وضعیت عدد طبیعی متناظر با آن چیست؟
دراین استدلال ابتداء و انتهای بازه های مفروض با اعداد طبیعی متناظر می شوند واعداد داخل بازه ها برای متناظر شدن با اعداد طبیعی بایستی ابتداء یا انتهای یک بازه را تشکیل دهند. درمورد بازه ی مشترک، هرعدد حقیقی که درآن واقع باشد با هیچ عدد طبیعی ای متناظر نیست، زیرا نمی توان بازه دیگری را یافت که عدد مفروض ابتداء یا انتهای آن باشد، که این امر برخلاف فرض است.
حالت دیگری که می توان درنظر گرفت، به این صورت است که ابتداء و انتهای بازه مشترک، عدد حقیقی واحدی باشند و به عبارت دیگر، بازه صرفاً یک نقطه باشد.
دو عدد طبیعی فرد و زوج که به ترتیب با ابتداء و انتهای چنین بازه ای متناظرند، درواقع با یک عدد حقیقی واحد متناظر می شوند که بازهم با تناقض مواجه می شویم.

****

چالش برعلیه برهان فوق چنین است:
اگراشتراک همه بازه های برهان فوق، یک بازه باشد چنین بازه ای آخرین بازه محسوب می شود، ازطرفی آخرین بازه نامعین است زیرا با فرض هر بازه ای به عنوان آخرین بازه، بازه ای کوچکتر ازآن قابل فرض است لذا وجود آخرین بازه یا بازه مشترک منتفی است و فرض شمارایی **R** منجر به تناقض نمی شود.
اما اشتراک همه بازه ها می تواند یک عدد حقیقی باشد که بعبارت دیگر بازه ای است که ابتداء وانتهای آن یکسان است. این عدد حقیقی یکتا است و دوعدد طبیعی فرد و زوج با آن متناظر می شوند که یک تناقض است.
برای رفع این تناقض می توان از ابتدای امر یک عدد طبیعی دلخواه، برای مثال عدد یک، را « کنار گذاشت» و روند تناظر را بدون درنظر گرفتن آن انجام داد و عدد طبیعی دلخواه را متناظر با عدد حقیقی یکتایی درنظر گرفت که حاصل از اعمال اصل بازه های تو در تو بر بازه های فوق الذکر است. به این ترتیب، تناقض ازمیان می رود.
به گونه ای دقیق ترمی توان گفت که:
۱) اگر بازه مشترک را انکار کنیم، اصل موضوع بازه های تو در تو را نفی کرده ایم و به این ترتیب، می توان **R** را در برهان فوق شمارا گرفت. اما نکته مهمتر آن است که با این نفی، اصل موضوع ددکیند Dedekind ( ۱۹۱۶ - ۱۸۳۱) را رد کرده ایم و خط راست را ( که نمایش هندسی **R** است) بدون وجود نقطه تقسیم کننده، به دو جزء مجزا بخش کرده ایم که به معنی وجود ناپیوستگی درخط راست است.
این اصل ازاین قرار است:
هرگاه همه نقطه های خط راستی به دو رده تقسیم شوند، چنان که هر نقطه ی رده نخستین در طرف چپ هر نقطه ی رده ی دومین واقع شود، آنگاه یک و فقط یک نقطه وجود دارد که این تقسیم نقاط به دو رده را بوجود می آورد و بدین نحو خط راست را به دو جزء تقسیم می کند.
این اصل موضوع به همه خطها و همه دایره ها سرشتی را اسناد می دهد که پیوستگی نامیده می شود.
بنابراین، باید تمهیدی اندیشید که درعین نقض اصل ددکیند، وجود نقطه منحصربفردی که مبنای این اصل است، نفی نشود زیرا نفی وجود این نقطه دال بر ناپیوستگی در خط راست است. چنین تمهیدی به سه صورت ممکن است:

الف) اگر دو جزء منقسم از یک خط راست به نوعی درهم شوند که درعین حال جدا از هم واقع شوند، این درهم شدگی درعین جدا ماندگی تنها با فرض تغیّر بی پایان این دو جزء و درنتیجه تغیّر بی پایان درنقطه ای که آن دو را از هم مجزا می کند، میسراست. درچنین وضعی، اصل ددکیند با فرض نقطه ای متغیّر بجای یک نقطه ی ثابت تقسیم کننده درآن نقض می شود، اما ناپیوستگی وجود ندارد.

به بیان دیگر، نفی بازه مشترک بصورت وجود یک نقطه مشترک اما نامعین و متغیّر درنظر گرفته می شود.
دراینجا نیز با نقطه ی متغیّر تقسیم کننده می توان مانند نقطه ی ثابت تقسیم کننده برخورد کرد و تناظررا با روش کنارنهادن که قبلاً تشریح گردید، برقرار کرد. اما با هر تغییر دراین نقطه، تناظر مذکورهم تغییرمی کند واین روند بطوربی پایان ادامه می یابد.
به این ترتیب، اگر شمارایی R پذیرفته شود، تناقضی درمیان نخواهد بود و اگر شمارایی آن را بدلیل روند بی پایان فوق الذکر پذیرفته نشود و R ناشمارا تلقی شود، بازهم تناقضی وجود ندارد.
بنابراین دراین حالت، پذیرش شمارایی یا ناشمارایی R امری تصمیم ناپذیراست و قبول هرکدام درست است.
ب) نقطه ناپیوستگی را نقطه ای در بی نهایت درنظرمی گیریم، به این ترتیب ناپیوستگی درخط راست همواره بیرون از دسترس است و نفی وجود نقطه منحصربفرد، به امری در بی نهایت موکول می شود. دراینجا، اصل ددکیند در بی نهایت صدق نمی کند.
ج) اگر مکان نقطه ناپیوسته نامعین باشد، یعنی درهر جایی ممکن باشد و درعین حال درهیچ جایی بطورمعین نباشد، آنگاه اصل ددکیند نقض شده اما مکان ناپیوستگی هم بیرون از دسترس است و نفی وجود نقطه منحصر بفرد قطعی نیست.
بنابراین، پذیرش شمارایی یا ناشمارایی R تصمیم ناپذیراست.
۲) اگر بازه مشترک تنها شامل یک عدد حقیقی باشد، اینکه چنین عددی با یک عدد طبیعی فرد یا عدد زوجی که بلافاصله بعد ازآن قرار دارد متناظر شود، تصمیم ناپذیراست و با هر کدام متناظر فرض شود صحیح خواهد بود که نتیجه این امر شمارایی R است.
چنین حالتی در واقع از اصل موضوع ددکیند ناشی می شود.
۳) اگر بازه مشترک شامل بی نهایت نقطه باشد، آنگاه هیچ عدد زوج یا فردی از مجموعه اعداد طبیعی که با هر نقطه ازاین بازه متناظر می شود، قطعیت نخواهد داشت و در روندی بی پایان با هرعدد طبیعی دیگری قابل جایگزینی خواهد بود.
چنین حالتی درواقع برخلاف اصل موضوع ددکیند، وجود بی نهایت نقطه تقسیم کننده را می پذیرد که خط راست را به دو جزء تقسیم می کنند.
دراین صورت، شمارایی R با تناظر یک به یک نهایی، به عنوان امری که حصول آن به روندی بی پایان موکول می گردد، پذیرفته می شود.
اگر امکان تناظر نهایی به دلیل روند بی پایان مذکور انکار شود، آنگاه ناشمارایی R پذیرفته شده است، اما نباید فراموش کرد که این ناشمارایی بر پایه نقض اصل ددکیند قرار دارد.
به این ترتیب، با نقض اصل ددکیند با فرض بی نهایت نقطه به جای یک نقطه تقسیم کننده درآن، شمارایی یا ناشمارایی R تصمیم ناپذیر می شود.

## روش پاره خطهای مجزا برای شمارش R

همانطور که ملاحظه گردید دربرهان قبل، ازاصل بازه های تو در تو استفاده شده است که مفهوم پاره خطهای تو در تو را دربردارد وهر بازه را می توان یک پاره خط فرض کرد که هرعدد حقیقی، ابتداء یا انتهای یک بازه یا یک پاره خط است.
دراینجا روشی برای شمارش R ارائه می شود که درآن به نحو دیگری ازمفهوم طول پاره خط استفاده شده است.
دراین روش هرعدد حقیقی بین صفر و یک به عنوان طول یک پاره خط بر یک محور درنظر گرفته می شود. طول هر پاره خط یک عدد حقیقی است که با تفاضل اعداد حقیقی که ابتداء و انتهای پاره خط مفروض را تشکیل می دهند، مشخص می شود.
بنابراین، هرعدد حقیقی به عنوان طول یک پاره خط، با دو عدد حقیقی دیگرمعین می شود: $y - x = a \;\; ; \;\; x , y , a \in (۰,۱) \;\; ; \;\; y > x$
$a$ طول پاره خط و $x$ و $y$ به ترتیب اعدادی حقیقی هستند که ابتداء و انتهای پاره خط مفروض را نشان می دهند. این دو عدد را با یک جفت $( x , y )$ نشان می دهیم. با این روش می توان در مورد پاره خطهای $a$ ، $b$ ، $c$ ، ... تابلوی ۱ را درنظرگرفت:

$$
\begin{array}{ll}
a: & (x^۱ , y^۲) , (x^۳ , y^۴) , (x^۵ , y^۶) , \dots \\
b: & (x^۱ , y^۲) , (x^۳ , y^۴) , (x^۵ , y^۶) , \dots \\
c: & (x^۱ , y^۲) , (x^۳ , y^۴) , (x^۵ , y^۶) , \dots \\
d: & \quad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \\
. & \\
. &
\end{array}
$$

( تابلوی ۱ )

دراین تابلو جهت سهولت کار، جفتهای متعلق به تمام پاره خطها بصورتی یکسان نشان داده شده اند. اما برای مثال، اعداد جفت $( x^۳ , y^۴ )$ از $b$ لزوماً با اعداد جفت $( x^۳ , y^۴ )$ از $c$ یکسان نیست، گرچه گاهاً ممکن است دو پاره خط یک ابتداء یا یک انتهای یکسان داشته باشند.
بنابراین، جهت اجتناب ازاشتباه، هر ردیف افقی را می توان به صورتی مشابه با آنچه که برای ردیف اول نشان می دهیم، درنظر گرفت:

$$(a x^۱ , a y^۲) \;,\; (a x^۳ , a y^۴) \;,\; (a x^۵ , a y^۶) \;,\; \dots$$

برای مثال $a y^۲$ به این معنی است که $y^۲$ یک انتها برای پاره خط $a$ است و به معنی ضرب کردن $a$ در $y^۲$ نیست.
با این قرار، اکنون تابلوی ۱ را بصورت زیر مرتب می کنیم:

$$
\begin{array}{ccccc}
a x^۱ & b x^۱ & c x^۱ & d x^۱ & . \\
a y^۲ & b y^۲ & c y^۲ & d y^۲ & . \\
a x^۳ & b x^۳ & c x^۳ & d x^۳ & . \\
a y^۴ & b y^۴ & c y^۴ & d y^۴ & . \\
. & . & . & . & .
\end{array}
$$

( تابلوی ۲ )

در تابلوی ۲، اعداد صفر و یک جزء روند شمارش نیستند و شمرده نمی شوند، همچنین اعداد تکراری درحین شمارش حذف خواهند شد.
اگر برای همه پاره خطهای a ، b ، c ، ... دراولین جفت یعنی ($x_1$ , $y_2$) ، $x_1$ را صفر درنظر بگیریم $y_2$ طول پاره خطهای مذکور را معین خواهد کرد. به این ترتیب تابلوی ۲ بصورت زیر درمی آید:

$$\begin{array}{cccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & & \circ \\ a \to & b & c & d & & . \\ \swarrow & & & & & \\ a x_3 & b x_3 & c x_3 & d x_3 & & . \\ \downarrow \quad \nearrow & & & & & \\ a y_4 & b y_4 & c y_4 & d y_4 & & . \\ . & . & . & . & & . \end{array}$$

( تابلوی ۳ )

نکته اصلی دراین روش ازاین قراراست:
در تابلوی ۳ ملاحظه می شود که تمامی اعداد ردیف اول، صفراست. عدد صفر مورد شمارش نیست، لذا بصورت یک جای خالی در جدول ظاهر می شود. دراین نواحی خالی می توان اعداد قطری را که از روی اعداد واقع در تابلوی ۳ ساخته می شوند، قرار داد.
اما چنین کاری نیاز به تنظیم مجدد اعداد جدول دارد تا شمارش آن تکرار شود. اگر اعداد قطری را به عنوان طول پاره خطهای جدید درنظر بگیریم و پاره خطهای دردسترس را بصورت $a$ , $T_1$ , $b$ , $T_2$ , $c$ , $T_3$ , ... مرتب کنیم، بر طبق روندی که در بالا تشریح گردید، به تابلوی ۴ دست می یابیم:

$$\begin{array}{cccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ a & T_1 & b & T_2 & c & . \\ a x_3 & T_1 x_3 & b x_3 & T_2 x_3 & c x_3 & . \\ a y_4 & T_1 y_4 & b y_4 & T_2 y_4 & c y_4 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{array}$$

( تابلوی ۴ )

ملاحظه می شود که با این تنظیم مجدد، ردیف اول تماماً صفرمی شود، که بازهم به عنوان جایگاه اعداد قطری جدیدی که از روی اعداد حقیقی واقع در تابلوی ۴ ساخته می شوند، درنظر گرفته می شود.
به این ترتیب، اعداد تابلوی ۴ مجدداً باید بر طبق همین روال تنظیم شوند واین روند بطور بی پایان ادامه می یابد.
نتیجه: ملاحظه می شود که با فرض شمارایی اعداد حقیقی و عمل برطبق روش فوق الذکر تناقضی مشاهده نمی شود، اما دست یافتن به تناظر یک به یک بین **R** و **N** به امری بی پایان بدل می شود. انکار وجود این تناظر به دلیل بی پایانی روند دسترسی به آن امکان پذیر است، لذا در این حالت، ناشمارایی **R** به عنوان یک اصل موضوع پذیرفته می شود.

## تحلیل تابع ساخت

در برهان کانتور برای شمارایی **R** دیدیم که ازارقام پس ازاعشار هرعدد حقیقی که در فهرست اعداد حقیقی برای ساخت یک عدد قطری قرار دارد، تنها یک رقم برای ساختن عدد قطری بکار می رود. این رقم براساس عددی طبیعی که جایگاه آن عدد حقیقی را در فهرست معین می کند، مشخص می شود. برای مثال، اگر یک عدد حقیقی دهمین عدد از فهرست باشد، دراینصورت دهمین رقم اعشاری آن، در ساخت عدد قطری بکار می رود.
مجموعه ی ارقام پس از اعشار اعداد واقع در فهرست را با این شرط که همه این ارقام در ساخت عدد قطری معینی شرکت می کنند، درنظر می گیریم. این مجموعه عبارت است از: $A = \{ a_{11} , a_{22} , a_{33} , ...\}$
ازطرف دیگر، درهمان برهان، در ساخت ارقام پس از اعشار یک عدد قطری، دو رقم بکارمی روند. مجموعه ی دو عضوی این ارقام را با مجموعه B مشخص می کنیم: $B = \{ b_1 , b_2 \}$
اکنون تابع ساخت را یک تابع از A بسوی B به این صورت تعریف می کنیم:
۱) اگر $a_{kk} = b_2$ آنگاه $f(a_{kk}) = b_1$ و ۲) اگر $a_{kk} \neq b_2$ آنگاه $f(a_{kk}) = b_2$ .
اگر یک عدد قطری را به صورت کلی $T = ۰/ t_1 t_2 t_3 ...$ درنظر بگیریم، آنگاه $f(a_{kk}) = t_k$ که $t_k$ از روی تابع ساخت بدست می آید.
در قضیه زیر نشان می دهیم که اگرعدد قطری در داخل فهرست شمارایی از اعداد حقیقی باشد، هنگام ساخت آن در ساخت خودش شرکت نمی کند.

$x_1 = ۰/ a_{11} a_{12} a_{13} ...$ | $T = ۰/ t_1 t_2 t_3 ...$
$x_2 = ۰/ a_{21} a_{22} a_{23} ...$
$x_3 = ۰/ a_{31} a_{32} a_{33} ...$
.
.
$x_n = T' = ۰/ t'_1 t'_2 t'_3 ... t'_n ...$

.
.
.

( تابلوی ۱)

در تابلوی ۱، $x\,n = T'$ از فهرست، همان عدد قطری T است که ساخته می شود. جهت اجتناب از اشتباه، ارقام پس از اعشار $T'$ را بصورت $T' = ۰/\, t'_۱\, t'_۲\, t'_۳ \ldots$ نشان می دهیم.
قضیه: $x\,n$ در ساخت T شرکت نمی کند.
برهان( خلف): فرض کنیم $x\,n$ در ساخت T شرکت می کند، دراین صورت $t\,n$ از روی $t'\,n$ براساس تابع ساخت معین می شود:
۱) اگر $t'n = b۲$ آنگاه $t\,n = b۱ \neq t'n$ . و ۲) اگر $t'n \neq b۲$ آنگاه $t\,n = b۲ \neq t'n$ .
در هر دو حالت $t\,n \neq t'\,n$ که برخلاف تساوی T و $T'$ است. بنابراین، فرض درست نیست.
نتیجه: ازآنجا که عدد قطری مذکور در فهرست واقع است، شمرده می شود اما نمی تواند در ساخت خود شرکت کند. □

حال باید مشخص کرد که $T'$ حائز چه شرایطی باید باشد تا تناقضی پیش نیاید. با توجه به اینکه $x\,n$ در ساخت T شرکت نمی کند، در اینصورت هر $t\,n$ از روی $a\,(n+۱)\,n$ از $x\,n+۱$ ساخته می شود. در اینجا برای $t'\,n$ دو حالت امکان پذیراست:

۱)
$$( a\,(n+۱)\,n = t'n \;\wedge\; t'n = b۱ \vee b۲ ) \Rightarrow \begin{cases} a\,(n+۱)\,n = b۱ \Rightarrow t\,n = b۲ \neq t'n \\ \text{or} \\ a\,(n+۱)\,n = b۲ \Rightarrow t\,n = b۱ \neq t'n \end{cases}$$
( $\wedge$ علامت و ، $\vee$ علامت یا)

که این نتیجه بر خلاف تساوی T و $T'$ است. لذا چنین حالتی امکان پذیر نیست.

۲)
$$( a\,(n+۱)\,n \neq t'n \;\wedge\; a\,(n+۱)\,n \neq b۱ \wedge b۲ ) \Rightarrow t\,n = b۲ \wedge ( t'n = b۲ \;\vee\; t'n = b۱ )$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t\,n = b۲ \;,\; t'n = b۲ & \text{متناقض نیست:} \\ \text{or} \\ t\,n = b۲ \;,\; t'n = b۱ & \text{متناقض نیست:} \end{cases}$$

یا :
$$a\,(n+۱)\,n \neq t'n \;\wedge\; \begin{cases} a\,(n+۱)\,n = b۱ \Rightarrow t'n = t\,n & \text{متناقض نیست:} \\ \text{or} \\ a\,(n+۱)\,n = b۲ \Rightarrow t'n = t\,n & \text{متناقض نیست:} \end{cases}$$

مواردی را که متناقض نیستند، خلاصه می کنیم و باید توجه داشت که یکی از شروط زیر درباره ی هر $t'\,n$ از $T'$ ، که در مکان n ام فهرست قرار دارد، ضروری است:

۱) $a\,(n+۱)\,n \neq t'n \;\wedge\; a\,(n+۱)\,n = b۱ \vee b۲$
۲) $a\,(n+۱)\,n \neq t'n \;\wedge\; a\,(n+۱)\,n \neq b۱ \,,\, b۲ \;\wedge\; t'n = b۲$

که این شروط را همچنین بصورت زیر می توان درنظر گرفت:

$a\,(n+۱)\,n \neq t'n \;\wedge\; a\,(n+۱)\,n = b۲$
or
$a\,(n+۱)\,n \neq t'n \;\wedge\; ( a\,(n+۱)\,n \neq b۲ \Rightarrow t'n = b۲ )$

باید توجه داشت که وقتی $T'$ در مکان n ام فهرست است: الف) برای $t'$ هایی که پس از $t'\,n$ در ارقام اعشاری $T'$ واقع اند، شروط فوق در مورد آنها هم صدق می کند و قابل کاربرد است و در مورد آنها در شروط فوق به جای n از $n'$ ، یعنی مکان $t'\,n'$ مورد نظر که پس از $t'\,n$ واقع است( $n' > n$ ) ، استفاده می شود.
ب) برای $t'$ هایی که قبل از $t'\,n$ واقع اند، شروط فوق به ترتیبی مشابه بین هر $t'\,n'$ $( n' < n)$ و $a\,n'n'$ از $x\,n'$ برقراراست.

تحلیل فوق را برای هر تعداد از T می توان بکار برد، به عنوان مثال:
در فهرست تابلوی ۲، $T' = T$ در ساخت T شرکت نمی کند و در مکان ۴ ام واقع است. حال یک $T''$ در نظر می گیریم که با همان تابع ساخت بدست می آید، اما در ۴ $t''$ داریم: $t''۴ \neq t'۴$ یعنی $T'' \neq T'$ .
از آنجا که $T''$ در ساخت خود شرکت نمی کند، پس یک $T''' = T''$ هست که بعد از $T'$ یعنی در مکان ۵ ام واقع است و بین $t'''۴$ و $t'۴$ یکی از شروط مذکور برقراراست.
به این ترتیب، $x\,۵$ به مکان ششم فهرست منتقل می شود و بین $t'''\,۵$ و $a\,۶۵$ از $x۶$ ( قبلاً به صورت $x۵$

شمرده شده بود) یکی از شروط مذکور برقرار است و به همین ترتیب الی آخر.

| | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_1$ |
| $x_2$ | $x_2$ |
| $x_3$ | $x_3$ |
| $x_4 = T'$ | $x_4 = T'$ |
| $x_5$ | $x_5 = T''$ |
| $\hookrightarrow$ | $x_6$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |

( تابلوی ۲)

نتیجه: تحلیل ها ی فوق، روشی را برای فهرست کردن **R** مطرح می کند که در آن هیچ عدد قطری بیرون ازآن واقع نشود. فهرست کردن **R** به این روش و با در دست داشتن یک زیرمجموعه از آن با عدد اصلی $\aleph_0$ عملی پایان ناپذیراست، درنتیجه متناظر کردن قطعی هرعضو **R** با یک عضواز **N** خارج از دسترس است، اما وجود آن را هم نمی توان انکار کرد.
بنابراین، شمارایی یا ناشمارایی **R** امری تصمیم ناپذیراست و هر یک را می توان به عنوان یک اصل موضوع پذیرفت.

مثال: فهرست $\ldots, x_3, x_2, x_1$ را درنظر می گیریم. فرض می کنیم عدد قطری $T_1 = 0/t_{11}\,t_{12}\,t_{13}\ldots$ که براساس تابع ساخت از این فهرست بدست می آید بر طبق قضیه عدم شرکت، در ابتدای آن قرار دارد( تابلوی ۳) و $T_2$ پس از $T_1$ که بین $t_{21}$ از $T_2$ و $t_{11}$ از $T_1$ یکی از شروط فوق الذکر برقرار است و بین $t_{22}$ از $T_2$ و $a_{12}$ از $x_1$ هم همینطور و بقیه $t$ های $T_2$ با ارقام اعشاری $x$ ها بر طبق همان شروط هماهنگ می شوند و $T_3$ پس از $T_2$ که $t_{31}$ و $t_{32}$ و $t_{33}$ به ترتیب با $t_{11}$ و $t_{22}$ و $a_{13}$ از $x_1$ بر طبق همان شروط هماهنگ می شوند.

| | |
|---|---|
| $T_1$ | $T'_1$ |
| $T_2$ | $T'_2$ |
| $T_3$ | $T'_3$ |
| . | . |
| . | . |
| $x_1$ | $x_1$ |
| $x_2$ | $T_1$ |
| $x_3$ | $x_2$ |
| . | $T_2$ |
| . | . |
| . | . |

( تابلوی ۳)          ( تابلوی ۴)

بطور کلی در مورد $T_k = 0/t_{k1}\,t_{k2}\,t_{k3}\ldots$ ، $t_{k1}$ و $t_{k2}$ و ... و $t_{k(k-1)}$ از راست به چپ با $t_{11}$ از $T_1$ ، $t_{22}$ از $T_2$ و ... و $t_{(k-1)(k-1)}$ از $T_{k-1}$ هماهنگ است و $t_{kk}$ با $a_{1k}$ از $x_1$ هماهنگ است و الی آخر.

این فهرست بطور نامحدود قابل بسط است: اگر آن را به صورت $x_1, T_1, x_2, T_2, x_3, T_3, \ldots$ مرتب نماییم، و فرض کنیم $T'_1$ که از روی آن بدست می آید برطبق قضیه عدم شرکت، در ابتدای آن قرار دارد، مجدداً با همین روش بسط می یابد و الی آخر. ( تابلوی ۴)

## قضیه کانتور و پیوستار

یکی از قضایایی که با تعیین عدد اصلی مجموعه اعداد حقیقی ( پیوستار) ارتباط می یابد، قضیه زیراست که بنام قضیه کانتور مشهور است. برهان این قضیه را تشریح کرده و سپس به ایرادات وارد بر آن می پردازیم و در انتها نتیجه حاصله را بیان می کنیم.

اگر $X$ یک مجموعه باشد، مجموعه تمام زیرمجموعه های آن را با $p(X)$ نشان می دهند. $\mathrm{card}\,X$ به معنی عدد اصلی مجموعه $X$ است.
قضیه کانتور: اگر $X$ یک مجموعه باشد، آنگاه $\mathrm{card}\,X < \mathrm{card}\,p(X)$.
برهان: اگر $X = \varnothing$ ، آنگاه $p(\varnothing)$ یک عضو دارد، لذا $\mathrm{card}\,\varnothing < \mathrm{card}\,p(\varnothing)$.
اگر $X \neq \varnothing$ ، دراین حالت تابع $g : X \to p(X)$ که با $g(x) = \{x\} \in p(X)$ برای هر $x \in X$ تعریف می شود، یک به یک است.
( تابع $f : X \to Y$ یک به یک است، اگر $x_1, x_2 \in X$ و $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه $x_1 = x_2$ )

بنابراین، مجموعه X با زیرمجموعه ی $\{ \{ x \} \mid x \in X \}$ از $p(X)$ همتوان است، یعنی $\text{card } X \le \text{card } p(X)$. [ ≤ علامت کوچکتر یا مساوی]
( دراینجا از قضیه شرودر- برنشتاین Schröder-Bernstein theorem استفاده شده است. این قضیه چنین است: اگر دومجموعه A و B به قسمی باشند که A با یک زیرمجموعه B همتوان باشد وB نیز با یک زیرمجموعه A همتوان باشد، آنگاه A و B همتوان هستند.
ازاین قضیه می توان قضیه زیر را اثبات کرد که در قضیه کانتور بکار رفته است: اگر A و B دو مجموعه باشند، $\text{card } A \le \text{card } B$ اگر و تنها اگر یک تابع یک به یک $f : A \to B$ وجود داشته باشد.)
به این ترتیب، برای اینکه نشان داده شود که $\text{card } X < \text{card } p(X)$ ، باید نشان داد که X با $p(X)$ همتوان نیست.
از برهان خلف استفاده می کنیم: فرض می کنیم که تابع $f : X \to p(X)$ که یک تناظر یک به یک است، وجود دارد. حال تناقض دراین فرض را نشان می دهیم.
مجموعه ی متناظر با $x \in X$ را با $f(x)$ نشان می دهیم. $f(x)$ مجموعه ای است که به $p(X)$ تعلق دارد، پس x یا به $f(x)$ تعلق دارد یا تعلق ندارد.
زیرمجموعه ای ازx را که تشکیل شده است از همه اعضایی که در تناظر یک به یک به $f(x)$ تعلق ندارند، درنظرمی گیریم.
این مجموعه متعلق به $p(X)$ است و چون X با $p(X)$ تناظر یک به یک دارد، عضوی از X مانند s وجود دارد بطوری که با مجموعه مذکور که با $f(s)$ نشان می دهیم، متناظر باشد.
حال یا $s \in f(s)$ یا $s \notin f(s)$ .
۱) اگر $s \in f(s)$ ، دراینصورت بنا بر تعریف اعضاء $f(s)$ نتیجه می شود که $s \notin f(s)$ و این متناقض است.
۲) اگر$s \notin f(s)$ ، دراینصورت s بنا بر تعریف مجموعه ی $f(s)$ به $f(s)$ متعلق است، یعنی $s \in f(s)$ و این تناقض است.
همانطور که ملاحظه می شود در هر دو صورت به تناقض می رسیم و درنتیجه قضیه کانتور اثبات می شود.

اهمیت این قضیه در دو نکته است:
۱) ازآن نتیجه می شود که $\text{card } \mathbf{N} < \text{card } p(\mathbf{N})$ واین سؤال مطرح می شود که آیا عدد اصلی دیگری مانند x وجود دارد بطوری که $\text{card } \mathbf{N} < x < \text{card } p(\mathbf{N})$ . این سؤال همان مسئله پیوستار است.
۲) این قضیه، روشی را برای درست کردن یک دنباله بی نهایت ازاعداد ترانسفینی( ترا متناهی transfinite ) جدید ارائه می کند، برای مثال:

$$\text{card } \mathbf{R} < \text{card } p(\mathbf{R}) < \text{card } p(p(\mathbf{R})) < \ldots$$

دراینجا یادآوری این مطلب هم ضروری است که ثابت می شود اگرمجموعه X شامل n عضو باشد، آنگاه مجموعه p(x) دقیقاً شامل $۲^n$ عضو است.

****

اکنون قضیه کانتور را چنان بیان می کنیم که بتوان تناقض مذکور را آسانتر مورد بررسی قرار داد.
اگر A یک مجموعه وP مجموعه همه زیرمجموعه های آن باشد، مجموعه A با مجموعه ی همه زیرمجموعه های یک عضوی A همتوان است که زیرمجموعه ای ازP می باشد. بر طبق قضیه شرودر- برنشتاین نتیجه می شود که $\text{card } A \le \text{card } P$ .
حال اگر ثابت شود که این دو مجموعه همتوان نیستند، آنگاه $\text{card } A < \text{card } P$ برقراراست.
با استفاده از برهان خلف، فرض می کنیم که این دو مجموعه همتوان باشند. دراین حالت، تناظری یک به یک بین اعضاء A و زیرمجموعه های A وجود دارد. هر زیرمجموعه متناظر با $a \in A$ را با $f(a)$ نشان می دهیم، پس a یا عضوی از$f(a)$ است یا عضوی از آن نیست.
بطور قراردادی، اگر$a \in f(a)$ باشد، a را یک « عضو پیدا» می نامیم و اگر$a \notin f(a)$ ، آن را یک عضو« ناپیدا» می نامیم.
پس هرعضو A یا پیداست یا ناپیدا.
زیرمجموعه ای از A را که از همه عضوهای ناپیدای مجموعه A تشکیل می شود، درنظر می گیریم. این مجموعه باید با عضوی مانند s متناظر باشد. اکنون این سؤال پیش می آید که آیا s عضوی پیداست یا ناپیدا؟
۱) اگر s پیدا باشد یعنی $s \in f(s)$ ازآنجایی که هرعضو ازاین مجموعه ناپیدا است، s هم به عنوان عضوی ازآن ناپیدا است که این تناقض است.
۲) اگر s ناپیدا باشد یعنی $s \notin f(s)$ ، طبق تعریف مجموعه ی مذکور، s باید عضوی ازآن باشد یعنی $s \in f(s)$ و s پیدا است، که این هم تناقض است.
به این ترتیب، فرض همتوانی A و P منجر به تناقض می شود، پس $\text{card } A < \text{card } P$ .

## چالش با قضیه کانتور

درابتداء باید اذعان داشت که قضیه کانتور در مورد مجموعه های متناهی صادق است، درباره مجموعه های نامتناهی با وضعی متفاوت روبرو هستیم که به شرح آن می پردازیم.
در برهان فوق، وجود مجموعه ای مفروض است که همه عضوهای ناپیدا را دربردارد و زیرمجموعه ای از A است. مجموعه مفروض را B می نامیم که با s متناظر است. اما باید توجه داشت که گرچه وجود چنین مجموعه ای پذیرفته می شود، ولی s متناظر با آن، مغایر با وجود پیشین آن است و آن را نقض می کند. دلیل این امر چنین است:

اگر s عضو مجموعه موجود نباشد، s عضوی ناپیداست و برطبق تعریف B ، s به عضویت مجموعه ای که هست و شامل s نیست، درمی آید و به این ترتیب با امری مغایر با وجود پیشین آن مواجه می شویم. از طرف دیگر، اگر s عضو مجموعه موجود باشد، s عضوی پیداست و برطبق تعریف B ، s نباید عضو چنین مجموعه ای از پیش موجود و شامل s بوده باشد و بازهم با امری مغایر با وجود پیشین آن برخورد می کنیم.

در واقع، وجود مجموعه B از اصل موضوع تصریح axiom of specification ناشی می شود که بنا برآن B شامل اعضایی از A است که حکمی خاص درباره آنها صادق است. اصل موضوع تصریح ازاین قراراست:

متناظر با هر مجموعه A و هرحکم $\mathcal{P}(x)$ درباره $x \in A$ ، یک مجموعه ی $\{ x \in A \mid \mathcal{P}(x) \}$ وجود دارد که اعضاء آن، دقیقاً آن اعضاء A مانند x هستند که حکم $\mathcal{P}(x)$ برای آنها راست است.

برای مثال، اگر A مجموعه همه اعداد طبیعی باشد، گزاره ی x فرد است، برای بعضی از عضوهای A راست و برای بقیه دروغ است. مجموعه $\{ x \in \mathbf{N} \mid$ x فرد است $\}$ مجموعه همه اعداد فرد را مشخص می کند.

بنابراین، وجود پیشین B را که از اصل فوق ناشی می شود، رد کرده و کنار می گذاریم وB را تنها به عنوان نتیجه یک عملکرد ساختنی، معنی دار تلقی می کنیم و وجود B را در یک عملکرد یا فرآیند ساختنی محقق می دانیم.

اکنون براساس این دیدگاه ساختگرایانه نشان می دهیم که اگرA یک مجموعه نامتناهی باشد، درمورد مجموعه B به عنوان مجموعه ای ساختنی وعضو متناظر با آن به نتیجه ای قطعی نمی رسیم. استدلال ازاین قراراست:

۱) اگر ساخت B به پایان برسد، نمی تواند با $s \in B$ متناظر باشد، زیرا چنین امری یک تناقض است. علت آن است که s به عنوان عضوی ازB با زیرمجموعه ای ازA بصورت یک عضو ناپیدا متناظر شده و به همین دلیل درساخت B شرکت کرده است.

این زیرمجموعه ازA متفاوت ازB است. به این ترتیب، s هم با یک زیرمجموعه متفاوت ازA متناظراست و هم با B ، واین برخلاف تناظر یک به یک است. بنابراین، عضو متناظر با B نمی تواند عضوی پیدا باشد و B با عضو دیگری ازA متناظراست، بطوری که این عضو متعلق به B نیست.

دراستدلال بعدی نشان می دهیم که یافتن چنین عضوی به بی نهایت موکول می شود.

۲) اگر ساخت B پایان یافته تلقی شود و B با $s \notin B$ متناظر باشد، آنگاه B زیرمجموعه ای ازA است که قاعدتاً خودش هم باید درساخت خود شرکت کند، که در نتیجه s به دلیل عضو ناپیدا بودن برای B به عضویت B درمی آید و درساخت B شرکت می کند و همین امرمنجر به تغییر درB می شود و با زیرمجموعه ای متفاوت از قبل مواجه می شویم که بر طبق استدلال ۱ باید با عضوی ناپیدا مانند 's متناظر باشد، که مجدداً روند استدلال دوم تکرار می شود و تا بی نهایت ادامه می یابد. به این طریق، ساخت B پایانی ندارد. ¤

نکته مهمی که دراین استدلال وجود دارد آن است که دریک مرحله ازیافتن عضوی ناپیدا که با مجموعه B درحال ساخت، متناظر می شود، ممکن است لازم شود که برای اجتناب از تناقض موجود دراستدلال اول، تمامی تناظرهای یک به یک میان اعضاء A و زیرمجموعه های آن را تغییر داد تا یک عضو ازA با دو زیرمجموعه متفاوت متناظرنشود.

این به معنی آن است که B مجموعه ای بی ثبات است وعدم تعیّن اعضاء آن به عدم تعیّن درتناظر یک به یک منجرمی شود. یک حالت خاص ازاین مطلب در پاسخ به پرسش زیر مطرح می شود:

اگر تغییرB تا جایی ادامه یابد که B تمام اعضاء A را دربرگیرد، آنگاه درباره ی عضو متناظر با آن چه می توان گفت؟

در چنین حالتی چون B باید با عضوی ناپیدا متناظر شود، پس یک عضو ازB حذف می شود تا چنین عضوی بدست آید وازآنجا که این عضو با زیرمجموعه ای ازA متناظر بوده است، درنتیجه آن زیرمجموعه با عضوی دیگراز A متناظر می شود تا تناظر یک به یک نقض نشود.

با تغییر در یک مورد از تناظرها، همه آنها تغییر خواهند کرد و بنابراین، اعضاء B هم تغییر می کنند.

نتیجه: اتخاذ موضعی ساختگرایانه مبتنی بر دو استدلال فوق، به این نتیجه منجر می شود که مجموعه B ، در مواردی که A مجموعه ای نامتناهی است، مجموعه ی ثابتی نیست و تعریف مجموعه B ، بدست آوردن آن را تضمین نمی کند. اعضاء B تعیّن پذیر نیستند و تناظر یک به یک هم دچار عدم تعیّن است.

مجموعه ای که همه عضوهای ناپیدا را دربردارد، درهرمرحله از ساخت آن با اعضایی متفاوت ظاهرمی شود. این مجموعه اگرچه زیرمجموعه ای ازA است، اما معین نیست که چه مجموعه ای است و این به معنی عدم تعیّن تناظر یک به یک است. درمورد B ، تناقضی وجود ندارد و تناظر یک به یک نفی نمی شود، اما تناظر نهایی به امری در بی نهایت موکول می شود و همواره عدم تعیّن برآن حاکم است.

دراینجا، پذیرش وجود تناظر یک به یک یا نفی آن بدلیل خارج از دسترس بودن آن و یا بدلیل عدم تعیّن آن تا بی نهایت، تصمیم ناپذیراست.

ازاینرو، درمجموعه های نامتناهی مانند A ، برابری یا کوچکتر بودن عدد اصلی A از$p( A )$ تصمیم ناپذیراست و پذیرش هر یک به عنوان یک اصل موضوع، درست است.

یادداشت ۱: دراستدلال ساختگرایانه فوق، مجموعه B ساخته می شود و خودش هم دراین ساخت شرکت می کند. B زیرمجموعه ای از A است که حین ساخت آن از روی همه زیرمجموعه های A ، خودش هم دراین زیرمجموعه ها وجود دارد، اما تعیّن این وجود و تساوی آن با یکی از زیرمجموعه های متعلق به $p( A )$ منجر به تناقض می شود.

نتیجه این امر، عدم تعیّن B است و عضوی هم که با چنین مجموعه ی نامعینی متناظر می شود، ازجهت دارا بودن خاصیت معینی( پیدا یا ناپیدا بودن) که به عضویت درB بستگی دارد، دچارعدم تعیّن است، زیرا اعضاء چنین مجموعه ای معین نیست.

یادداشت۲: اگرفرض شود که مجموعه B ، به عنوان زیرمجموعه ای ازA درساخت خود شرکت نکند و بعبارت دیگر، زیرمجموعه هایی ازA که درساخت B شرکت می کنند، هیچ کدام با B مساوی نباشند، آنگاه مجموعه همه عضوهای ناپیدا چنان فرض می شود که در میان سایر زیرمجموعه های A قابل تعریف نیست. ازاینرو، عضو متناظر با آن هم ازنظر ناپیدایی، خارج از مدل مربوطه قرارمی گیرد، یعنی ناپیدایی آن در داخل مدل، تعریف پذیر نیست.

دراینجا، این مشکل مطرح می شود که برخلاف تعریف B که درساخت آن همه زیرمجموعه های A شرکت دارند، خودش درساخت شرکت نمی کند. پاسخ این مشکل چنین است:
درابتداء، مجموعه ای با عنوان مجموعه دربردارنده همه اعضاء ناپیدا، بدون دخالت خودش درساخت خود بدست می آید و چون همه زیرمجموعه های A باید درساخت آن شرکت کنند، مجموعه بدست آمده هم درحوزه زیرمجموعه های قابل تعریف قرارمی گیرد و ازحوزه غیرقابل تعریف خارج می شود و مجدداً مجموعه همه اعضاء ناپیدا از روی حوزه قابل تعریف ساخته می شود، اما خود آن درحوزه غیرقابل تعریف واقع می شود و این فراگرد بطور بی نهایت ادامه می یابد. اما این به معنی تغییر مداوم درB است.
درچنین تعبیری، تناظریک به یک تعیّن دارد و عدد اصلی A و $p(A)$ برابرند، اما ازطرف دیگر، مجموعه همه زیرمجموعه های A یعنی $p(A)$ به امری ساختنی بدل شده است و وجود آن با ساخت آن ممکن می شود.
درنظریه اصل موضوعی مجموعه ها Axiomatic set theory، وجود $p(A)$ براساس یک اصل موضوع جدید پذیرفته می شود، زیرا $p(A)$ ازاصل موضوع تصریح نتیجه نمی شود.
این اصل، اصل موضوع مجموعه های توانی axiom of power sets نامیده می شود، اما در ساختگرایی، وجود چنین مجموعه ای با ساخته شدن آن پا به عرصه می نهد و وجود آن، ابتدا به ساکن دردسترس نیست.
اصل موضوع مجموعه های توانی چنین است: متناظر با هرمجموعه، مجموعه ای ازمجموعه ها وجود دارد که عنصرهایش از تمام زیرمجموعه های مجموعه ی داده شده، تشکیل یافته است.

## نفی فرض پیوستار

الف) اگرمجموعه **R** را فقط شامل اعداد حقیقی معین بگیریم و اعداد ساختنی مانند اعداد قطری را رد کنیم، آنگاه عدد اصلی **R** ، $\aleph_0$ می شود.
ب) اگرمجموعه **R** را شامل اعداد حقیقی معین و اعداد قطری بگیریم و ساخته شدن اعداد قطری را معادل با « وجود پیشین» آنها در **R** بدانیم، آنگاه« می توان» عدد اصلی **R** را بزرگتر از $\aleph_0$ درنظرگرفت؛ زیرا دریک فرآیند نامتناهی برای شمارش **R** ، تناظر یک به یک میان **N** و **R** « دربی نهایت» برقرار می شود، که اگراین موضوع پذیرفته نشود، آنگاه عدد اصلی مجموعه **R** بزرگتر از عدد اصلی مجموعه **N** می گردد، یعنی $c > \aleph_0$ .
ج) مجموعه **D** را که شامل اعداد حقیقی در فهرست ۱( رجوع به بخش« برهان کانتور برای ناشمارایی **R** ») و عدد قطری T که از روی این فهرست ساخته می شود، درنظر می گیریم:

$$\mathbf{D} = \{ x^{۱} , x^{۲} , x^{۳} , \dots , T \}$$

T ساختنی است و دربی نهایت بدست می آید، لذا همواره مقدار دقیق آن معین نیست.
عدد اصلی مجموعه **D** ، $\aleph_0 + ۱ \neq \aleph_0$ است که بزرگتراز $\aleph_0$ و کوچکتر از $c$ است: عدد اصلی مجموعه **D** را نمی توان $\aleph_0$ دانست و نمی توان تناظر یک به یک بین آن و مجموعه **N** برقرار کرد؛ زیرا T « بطور کامل» دردست نیست و دربی نهایت بدست می آید و تا بطور کامل دردست نباشد، نمی توان آن را با یک عدد طبیعی متناظر کرد.
بطور کلی، افزودن تعداد متناهی ازاعداد قطری به اعداد حقیقی فهرست ۱، مجموعه ای را پدید می آورد که به همین دلیل، عدد اصلی آن بزرگتر از $\aleph_0$ و کوچکتر از $c$ است.
به این ترتیب، عدد اصلی مجموعه **D** ، فرض( یا گمان) پیوستار continuum hypothesis ( رجوع کنید به مقدمه فصل دوم) را نفی می کند.

## فصل سوم : عدد اصلی و مجموعه مرجع

دراین فصل، رابطه عدد اصلی و مجموعه مرجع را مورد بحث قرارمی دهیم. حاصل بحث، ارائه مجموعه هایی نامتعارف و طرح مفهوم عدد اصلی برای آنهاست.

عدد اصلی Cardinal number را یک مفهوم اولیه درنظر می گیریم و قواعد زیر را درمورد آن بیان می کنیم:
الف) هر مجموعه A با یک عدد اصلی مربوط است که با card A نشان داده می شود و برای هر عدد اصلی a ، یک مجموعه A وجود دارد، بطوری که card A = a .
ب) card A = ۰ اگر و فقط اگر $A = \varnothing$ .
ج) اگر A یک مجموعه متناهی غیرتهی باشد و برای یک $k \in \mathbf{N}$ ، A با مجموعه { k , ... , ۳ , ۲ , ۱} در تناظر یک به یک باشد، آنگاه card A = k .
د) دو مجموعه عدد اصلی یکسان دارند، اگر و فقط اگر با هم تناظر یک به یک داشته باشند.

در نظریه اصل موضوعی مجموعه ها، الف و د را یک اصل موضوع می گیرند بنام اصل موضوع اعداد اصلی axiom of Cardinality .
از قواعد ب و ج این تعریف بدست می آید که عدد اصلی یک مجموعه ی متناهی، تعداد عضوهای آن مجموعه است.
با این شرح می توان گفت که عدد اصلی یک مجموعه، ویژگی مشترکی است بین مجموعه و تمام مجموعه های همتوان آن.

## مقدمه

برای تشریح مطالب این فصل، مجموعه های سه عضوی را که ساده ترین حالت ممکن است، مدنظر قرارمی دهیم. بدیهی است که این مطالب همچنین درمورد سایرمجموعه های متناهی n عضوی صادق است.
مجموعه { a , b , c } را درنظر می گیریم. عدد اصلی این مجموعه همان تعداد عضوهای آن یعنی ۳ می باشد. عدد اصلی این مجموعه ، ویژگی مشترکی است بین آن و تمام مجموعه های همتوان آن یعنی تمام مجموعه های سه عضوی.
اگر تمام مجموعه های سه عضوی در یک مجموعه قرار گیرند، مجموعه حاصل یک مجموعه مرجع (جهانی) Universal set است که هر مجموعه سه عضوی به آن تعلق دارد. اکنون این مجموعه مرجع را مورد بررسی قرار می دهیم.
دراین مجموعه مرجع، مجموعه ای را درنظر می گیریم که یک عضو ازآن مجموعه ای است که همه عضوهای اول انتخابی ازاعضاء مجموعه مرجع را دربردارد و عضو دیگر، مجموعه ای است که همه عضوهای دوم انتخابی از اعضاء مجموعه مرجع را دربردارد و عضو بعدی، مجموعه ای است که همه عضوهای سوم انتخابی ازاعضاء مجموعه مرجع را شامل می شود. چنین مجموعه ای را E می نامیم.
برای مثال، درمجموعه { a , b , c } ازمجموعه مرجع، اگر b به عنوان عضو سوم انتخاب شود، درعضوی از E قرارمی گیرد که مجموعه ای است که همه عضوهای سوم انتخابی را دربردارد.
مجموعه E بر پایه اصل انتخاب است. اصل انتخاب axiom of choice را چنین بیان می کنیم:
برای هر مجموعه ی غیرتهی A که اعضاء آن مجموعه های غیرتهی مجزای Aa هستند، مجموعه ای وجود دارد که اعضاء آن تشکیل شده باشند از یک xa ازهر Aa .

اکنون باید توجه داشت که ازآنجایی که E یک مجموعه سه عضوی است، درمورد آن دچارمشکل می شویم:
آیا از E انتخاب صورت می گیرد؟ اگر ازE انتخابی صورت نگیرد، این امر برخلاف تعریف E است، زیرا E عضوی ازمجموعه مرجع است.
ازطرف دیگر، اگرازE انتخاب صورت گیرد، آنگاه هرعضو آن برحسب انتخاب مربوطه، شامل خود یا شامل عضو دیگری از E می شود که این امر با توجه به تعریف E تا بی نهایت ادامه می یابد و درنتیجه E فاقد وجود ثابتی می شود.
برای ازمیان برداشتن تناقض موجود در E ، چند راه حل را می توان درپیش گرفت:
۱) فرض پایه ای وجود E یعنی وجود مجموعه مرجع را نفی کرد و اظهار داشت که مجموعه همه مجموعه های سه عضوی وجود ندارد.
۲) مجموعه مرجع را به عنوان مجموعه ای که همه اعضاء آن دردسترس نیست، درنظر بگیریم و مجموعه E را امری ساختنی بدانیم که به طریق سلسله مراتبی ساخته می شود، که درنتیجه حصول E در بی نهایت است یا به بی نهایت موکول می شود.
دراین حالت درواقع مجموعه مرجع ساخته می شود.
۳) وجود مجموعه مرجع را نفی کنیم و درعوض به جای آن، طبقات جداگانه ای ازمجموعه همه مجموعه های سه عضوی « هم طبقه» را درنظر بگیریم. دراینحالت، برای E یک عدد اصلی طبقه ای قائل می شویم و سه عضوی بودن E را درطبقه ای دیگر تعریف می کنیم.
۴) انتخاب ازE را درخود بپذیریم و به این ترتیب مجموعه ای نامتعارف بدست می آید که اعضاء آن خود ثابتی ندارند و در تعاطی( داد و ستد) بی نهایت با خود و/ یا یکدیگرند.
موارد سوم و چهارم را در دو بخش بعدی مورد بررسی قرارمی دهیم. دراینجا حالت دوم را روشنترمی کنیم.

اگر با یک دیدگاه ساختگرایانه بپذیریم که همه اعضاء مجموعه مرجع در دسترس نیستند، آنگاه مجموعه E طی بی نهایت مرحله، ساخته می شود و حصول نهایی آن در بی نهایت است.
دراین حالت E بطور سلسله مراتبی ساخته می شود و به این ترتیب مجموعه های جدیدی به مجموعه مرجع افزوده می شوند و درواقع، مجموعه مرجع به امری ساختنی بدل می شود.

برای مثال، در تابلوی ۱، E ۰ از روی اعضاء دردسترس مجموعه مرجع **U** حاصل می شود که در آن مجموعه x ها، شامل همه عضوهای اول انتخابی است و مجموعه y ها و z ها به ترتیب شامل همه عضوهای دوم و سوم انتخابی است.
E۱ از روی E ۰ بدست می آید و الی آخر که E نهایی در بی نهایت بدست می آید. دراین مثال، E ۰ ، E۱ ، E۲ ، ... به عضویت **U** درمی آیند و درنتیجه **U** در طی مراحل حصول E ، ساخته می شود.

$$E_{۰} = \{ \{ x_{۱} ,\ x_{۲} ,\ x_{۳} , \ldots \} , \{ y_{۱} ,\ y_{۲} , y_{۳} , \ldots \} , \{ z_{۱} , z_{۲} , z_{۳}, \ldots \}\} = \{ X_{۰} , Y_{۰} , Z_{۰} \}$$

$$E_{۱} = \{ \{ x_{۱} ,\ x_{۲} ,\ x_{۳} , \ldots ,\ X_{۰} \} , \{ y_{۱} ,\ y_{۲} , y_{۳} , \ldots , Y_{۰} \} , \{ z_{۱} , z_{۲} , z_{۳}, \ldots , Z_{۰} \}\} = \{ X_{۱} , Y_{۱} , Z_{۱} \}$$

$$E_{۲} = \{ \{ x_{۱} ,\ x_{۲} ,\ x_{۳} , \ldots ,\ X_{۰} , X_{۱} \},\{ y_{۱} ,\ y_{۲} , y_{۳} , \ldots , Y_{۰} , Y_{۱} \},\{ z_{۱} , z_{۲} , z_{۳}, \ldots , Z_{۰} , Z_{۱} \}\} = \{ X_{۲}, Y_{۲}, Z_{۲} \}$$

.

.

.

( تابلوی ۱)

## عدد اصلی طبقاتی

تناقض مرتبط با مجموعه E را مجدداً مرور می کنیم. تناقض وقتی پیش می آید که برای مثال مجموعه همه عضوهای اول که عضوی از E است به عنوان عضو اول یا عضوغیراول ازE انتخاب شود، که براین اساس درهر یک ازاین دوحالت دچار تناقض می شویم:
الف) مجموعه همه عضوهای اول ازE به عنوان عضو اول انتخاب شود، دراین حالت:
۱) اگراین مجموعه شامل خودش نباشد، تعریف خودش را که براساس شمول همه عضوهای اول ازمجموعه های متعلق به **U** است،

نقض می کند. پس شامل خودش است.
۲) اگر شامل خودش باشد، مجدداً مجموعه حاصله به عنوان عضو اول از E به عضویت خود درمی آید، که این امر تا بی نهایت رخ می دهد و عضو اول از E نامعین می شود. پس شامل خودش نیست.
ب) مجموعه همه عضوهای اول از E به عنوان عضوغیراول( برای مثال عضو دوم) انتخاب شود، دراین حالت:
۱) اگراین مجموعه عضوی ازمجموعه همه عضوهای دوم نباشد، برخلاف تعریف مجموعه همه عضوهای دوم است، پس به عضویت آن درمی آید.
۲) اگراین مجموعه عضوی ازمجموعه همه عضوهای دوم باشد، مجموعه دربردارنده آن هم به عنوان یک عضو از E مورد انتخاب واقع می شود و براین اساس به عضویت خود یا عضو دیگری از E درمی آید و با ادامه این روند، یک تعاطی بی نهایت میان اعضاء E روی می دهد که به این ترتیب، تمایز میان اعضاء E ازبین می رود. پس این مجموعه عضوی ازمجموعه همه عضوهای دوم نیست.

یک راه حل برای آن که چنین تناقضی پیش نیاید آن است که میان E و مجموعه هایی که درحصول E دخیل اند، تفاوت طبقه ای قائل شد.
در نتیجه، انتخاب یک عضو از E ، متفاوت از انتخاب یک عضو ازمجموعه ای غیر از E است.
برای مثال، اگرعضوی از E که همه عضوهای اول را دربردارد، به عنوان عضو دوم از E انتخاب شود، این عضو دوم نمی تواند به عضویت مجموعه همه عضوهای دوم از E درآید. زیرا درمجموعه همه عضوهای دوم، عضوهای دوم ازمجموعه های غیر از E که به طبقه ای غیر از طبقه ی مجموعه E تعلق دارند، انتخاب شده اند.
مجموعه E یک مجموعه سه عضوی از طبقه بالاتراست و عضوی ازآن که به عنوان عضو دوم انتخاب می شود، نمی تواند درمجموعه ای که همه عضوهای دوم ازمجموعه های سه عضوی از طبقه ای پایین تر را دربردارد، قرار گیرد.
اصولاً سخن گفتن ازعضویت عضو دوم انتخابی از E درعضوی از E که همه عضوهای دوم را دربردارد، بی معنی است. زیرا اعضاء اخیر همگی ازمجموعه های متعلق به طبقه ای متفاوت از طبقه E انتخاب شده اند.
به این ترتیب، اعضاء E درساخت E دخالتی ندارند و نمی توانند داشته باشند. اعضاء E نمی توانند به عضویت یکدیگر یا خودشان درآیند.
همانطور که ملاحظه می شود، باید تفاوت درطبقات را درتعریف عضو اول و عضو دوم و عضو سوم از یک مجموعه سه عضوی ملحوظ کرد و تفاوت های طبقاتی بین E و مجموعه های سه عضوی را که با اعضاء E مرتبط هستند، درنظر گرفت.
به این ترتیب، مجموعه مرجع **U** که شامل همه مجموعه های سه عضوی است، نفی می شود و به جای آن طبقاتی جداگانه ازمجموعه همه مجموعه های سه عضوی « هم طبقه» خواهیم داشت.
همانطور که پیشتر در بحث از تئوری طبقات گفتیم، برتراند راسل تفاوت را در طبقات مختلف نمادها درنظر می گیرد که وضع طبقه ای شان را قواعد نحوی حاکم بر آنها معین می کنند.
دراینصورت، دو تعریف متفاوت ازعدد ۳ خواهیم داشت که بیانگر دو طبقه متفاوت از نمادهای مرتبط با مجموعه های معین است که قواعد نحوی متفاوتی برآنها حاکم است. درعمل، هنگام کاربرد « ۳ » ، طبقه ی مجموعه مرتبط با آن و قاعده نحوی حاکم برآن را مشخص نمی کنیم، اما مجموعه E نشان می دهد که با قبول تئوری طبقات برای اجتناب از تناقض، این تفاوت های طبقه ای در کاربردهای عدد ۳ مستترند.
براین اساس، طبقات نامحدودی از نمادها را برای ۳ و هرعدد طبیعی دیگر می توان درنظر گرفت.

### عدد اصلی متعاطی

دراینجا، حالتی را مورد بحث قرارمی دهیم که درآن E به عنوان عضوی ازمجموعه مرجع، مشمول تعریف اعضاء خود می شود.
قبلاً چنین حالتی را بدلیل امکان تکرار بی نهایت آن کنار گذاشته بودیم.
برای روشن ساختن این حالت از مثالی استفاده می کنیم. فرض براین است که همه اعضاء **U** به غیرازE دردسترس اند.
اگرمجموعه های A و B و C از E به ترتیب شامل همه عضوهای اول و دوم و سوم انتخابی باشند وازاعضاء E انتخاب صورت گیرد، آنگاه بطورمثال چنین خواهیم داشت:
C به عنوان عضو اول انتخابی از E ، عضوی ازمجموعه A می شود و B به عنوان عضو دوم انتخابی از E به عضویت خودش درمی آید و A به عنوان عضو سوم انتخابی از E به عضویت C درمی آید.
مجدداً با انتخابی که صورت می گیرد، برای مثال، اگرمجموعه A که C را دربردارد به عنوان عضو اول انتخابی باشد، به عضویت مجموعه A درمی آید که همه اعضاء اول انتخابی را شامل می شود. اگرمجموعه C که A را دربردارد به عنوان عضو دوم انتخابی باشد، به عضویت مجموعه B درمی آید که همه اعضاء دوم انتخابی را شامل می شود. اگرمجموعه B که B را دربردارد به عنوان عضو سوم انتخابی باشد، به عضویت مجموعه C درمی آید که همه اعضاء سوم انتخابی را شامل می شود و الی آخر. این انتخابها بطور بی نهایت ادامه می یابند.
بنابراین، E مجموعه ای متعارف نیست و صورت معینی ندارد. اعضاء E دچار تغیّر و تَعاطی( داد و ستد) بی پایان است.
دراین حالت، مجموعه E را یک مجموعه مُتعاطی می نامیم.
یک حالت خاص ازمجموعه متعاطی آن است که هرعضو بطوربی نهایت خود را دربرگیرد. برای مثال، اگرC شامل همه عضوهای سوم انتخابی باشد و بطور بی نهایت به عنوان عضو سوم از E انتخاب شود، آنگاه C بطور بی نهایت خود را شامل می شود و این امر می تواند برای سایر اعضاء E هم رخ دهد.
درمورد مجموعه های متعاطی مانند E باید توجه داشت که تعاطی اعضاء بصورت مرحله ای است: درمجموعه E ازمثال فوق، اگرمجموعه A و B به ترتیب به عنوان عضو دوم و اول از E انتخاب شود، آنگاه مجموعه A به عضویت B که شامل همه عضوهای دوم انتخابی است، درمی آید و مجموعه B به عضویت A که شامل همه عضوهای اول انتخابی است، درمی آید.
اما A ابتداء بدون آنکه B را دربرداشته باشد، به عضویت B درمی آید وB ابتداء بدون آنکه A را دربرداشته باشد، به عضویت A درمی آید و پس ازآن مجدداً با انتخابهای بعدی، تعاطی ادامه می یابد.
بعبارت دیگر، چنین نیست که $A\in B$ و $B\in A$ بطور همزمان روی دهد، یعنی A و B در عین حال هم شامل و هم مشمول باشند، که یک تناقض است.

بطورکلی، هرعضواز E مجموعه ای نامعین و درتعاطی بی نهایت با سایراعضاء است و درنتیجه هرعضوآن مجموعه ای گسترش یابنده است.
مجموعه E دارای ویژگی خاصی است: تعاطی بی نهایت موجب عدم تمایز اعضاء می شود و نمی توان اعضاء آن را بطور متمایز، مشخص و مجزا کرد.
این ویژگی این مسئله را مطرح می کند که آیا می توان یک عدد اصلی برای آن درنظر گرفت؟
روشن است که مطرح کردن مفهوم عدد اصلی درمورد چنین مجموعه ای، نامتعارف است زیرا به علت عدم تمایز اعضاء ازهم، تناظر یک به یک بین E و هرمجموعه سه عضوی دیگر، امکان پذیر نیست.
تنها به طریقی شهودی و استعلایی( برگذرنده) transcendental می توان پذیرفت که عدد اصلی E ، ۳ است و ازآنجایی که مفهوم عدد اصلی درمورد چنین مجموعه ای متفاوت ازمفهوم متعارف و کلاسیک آن است، این عدد اصلی را« عدد اصلی متعاطی» می نامیم.
پیش ازاین دیدیم که هرچند عدد اصلی طبقاتی، با قواعد نحوی حاکم بر اعضاء یک مجموعه پیوند دارد، اما مفهوم کلاسیک آن، دست نخورده باقی مانده است.
نکته مهم دیگر درمورد مجموعه متعاطی E آن است که آیا انتخاب عضوی از E با وجود آن که عضو مجزایی وجود ندارد، امکان پذیراست؟
بازهم به طریقی شهودی می توان عضوی از آن را بطوراستعلایی انتخاب کرد. حاصل این انتخاب استعلایی را« عضو استعلایی» می نامیم.
با قبول امکان انتخاب ازچنین مجموعه ای، فضای جدیدی گشوده می شود و درنتیجه E فوق الذکر همان مجموعه ی نهایی که تعریف آن را برآورده می سازد، نخواهد بود و مجدداً حصول مجموعه نهایی امری ساختنی می شود و به بی نهایت موکول می گردد.
برای مثال، اگرعضوی از E فوق الذکر به عنوان عضو اول انتخاب شود، چنین عضو اولی که بطوراستعلایی انتخاب شده، درمجموعه ای که عضوهای اول انتخابی متعارف و انتخابی استعلایی را دربرگرفته، قرار می گیرد و این مجموعه درساختن مجموعه های پیچیده ی سه عضوی بکاربردنی است.
بطور کلی، می توان مجموعه های سه عضوی پیچیده ای را درنظر گرفت که دراعضاء آنها، که هر کدام یک مجموعه اند، عضوهای نامتعارفی مانند اعضاء E هم - غیر ازاعضاء مجموعه های متعارف متعلق به **U** - عضویت دارند.
این گونه ازمجموعه ها با اعداد اصلی متعاطی، تاکنون در ریاضیات بررسی نشده و بکاربرده نشده اند.

****

یادداشت: اصل انتخاب axiom of choice
در یک مغازه میوه فروشی که تعدادی سبد(غیرتهی) میوه دارد، اگرازشما بخواهند که ازهرسبد یک میوه( و فقط یکی) انتخاب کنید، کار ساده ای است. اما سؤال زیر که بدیهی بنظر می رسد، درواقع پیچیده است:
یک مجموعه غیرتهی Z که عناصرش مجموعه های غیرتهی مجزای z a هستند، داده شده است؛ آیا مجموعه ای مانند R وجود دارد که عنصرهایش تشکیل شده باشند از یک x a از هر z a ؟
مشکل اصلی وقتی پیش می آید که Z نامتناهی باشد. کوشش های ارنست تسرملو Ernest Zermelo ( ۱۹۵۳- ۱۸۷۱) و دیگران در اوایل قرن بیستم برای پاسخ به این سؤال به نتیجه نرسید.
تسرملو احساس کرد که این سؤال احتمالاً حل شدنی نیست و تنها راه رهایی ازمشکل، مسلم دانستن اصل موضوعی است که ازآن زمان به اصل انتخاب معروف شده است.
اصل انتخاب: برای هر مجموعه غیرتهی Z که عناصرهایش مجموعه های غیرتهی z a هستند، مجموعه ای وجود دارد که هرعضوش یک عضو ازهر z a باشد.
درمجموع، درمورد چنین مشکلاتی فقط دو راه وجود دارد:
الف) اصل را براین بگذاریم که تنها نتیجه های ساخته شدنی را بپذیریم و نتیجه های وجودی محض را نپذیریم، آنگاه روشها وعرصه های ریاضیات آنقدر محدود می شوند که، خارج ازحساب، تنها زمینه های بسیارکوچکی را می توان بررسی کرد.
ب) نتیجه های ساخته شدنی و وجودی محض، ازجمله اصل موضوع انتخاب، را بپذیریم و درنتیجه، به حل مسائل بیشتر و توسعه دادن ریاضیات بپردازیم.

در ۱۹۳۸، کورت گودل Kurt Gödel با اثبات اینکه افزودن اصل موضوع انتخاب به دیگر اصول موضوع موجود ریاضی هیچ تناقضی ایجاد نمی کند، نشان داد که اصل انتخاب با دیگر اصول کلاسیک ریاضی سازگار است.
در ۱۹۶۳، پل کوهن Paul J. Cohen ثابت کرد که اصل موضوع انتخاب درحقیقت از دیگراصول موضوع موجود، مستقل است. به عبارت دیگر، اصل موضوع انتخاب را نمی توان به عنوان یک قضیه با استفاده از اصول موضوع کلاسیک ریاضی ثابت کرد.
اکنون اصل انتخاب را به عنوان یک اصل جدید پذیرفته اند و استفاده ازآن برای اثبات بسیاری ازنتایج مهم درشاخه های گوناگون ریاضیات ضروری است.

## فصل چهارم: جستاری درمجموعه ها

دراین فصل، ابتداء به بررسی ابهام موجود در یک تساوی - که کاربردهای فراوانی دارد- می پردازیم. دربخش دوم، با مثالی به نکته ای درنظریه مجموعه ها خواهیم پرداخت که هرچند درآن نهفته است، اما بصورت اصل موضوع درنیامده یا نمادگذاری جداگانه ای نیافته است.
دربخش سوم، بطورکوتاه اعدادی را معرفی می کنیم که درفواصل بی نهایت کوچک ازهرعدد حقیقی واقع اند. دربخش چهارم، به بررسی پرسشی که قدری متناقض است، خواهیم پرداخت.

****

### بحثی درباره اشتراک یک رده تهی

بدست آوردن اشتراک و اجتماع رده های بزرگی ازمجموعه ها در نظریه مجموعه ها و توپولوژی عمومی در موارد بسیاری پیش می آید.
اگر $\{ A_i \} = \{ A_1 , A_2 , A_3 , \dots , A_n \}$ رده ای class ( یا خانواده ای family ) ازمجموعه ها باشد که با مجموعه اندیس گذار $I = \{1 , 2 , 3 , \dots , n \}$ اندیس گذاری شده باشد، آنگاه اجتماع و اشتراک آنها عبارتست از :

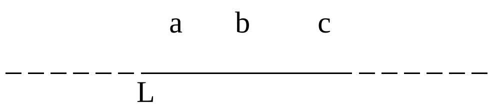
$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i\in I}^{n} A_i = \{ x : \ x \in A_i ,\ i \in I \ \text{به ازای لااقل یک} \}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i\in I}^{n} A_i = \{ x : \ x \in A_i ,\ i \in I \ \text{به ازای هر} \}$$

دراینجا، تاکید می شود که تمام مجموعه های این رده ، زیرمجموعه های **U** ( مجموعه مرجع) می باشند. حال اگراین رده تهی( یعنی $I = \varnothing$ ) باشد، هر دو تساوی $\bigcup_i A_i = \varnothing$ و $\bigcap_i A_i = U$ ازنتایجی هستند که کاربردهای فراوان دارند.
اکنون مشکل ما با حالت $\bigcap_i A_i = U$ آغاز می شود. استدلالی که درمورد این تساوی می شود، چنین است:
اگرعضوی میان تمام مجموعه های یک رده، مشترک باشد و ازطرف دیگر، دراین رده مجموعه ای نباشد( وجود نداشته باشد) ، آنگاه هرعضوی می تواند به عنوان اشتراک آنها درنظر گرفته شود واین اشتراک را برآورده سازد.از آنجا که هرچنین عضوی به **U** تعلق دارد، پس اشتراک این رده خالی ازمجموعه ها **U** است. اگرمجموعه مرجعی مفروض نبود، چنین اشتراکی بی معنی میشد.
نکته مبهم دراستدلال فوق این است که اگرهیچ مجموعه ای دراین رده نباشد، چگونه می توان ازاشتراک آنها سخن گفت؟
بعبارت دیگر، با این تساوی می پذیریم که اشتراک هیچ چیز، همه چیز را دربردارد! چنین امری چگونه ممکن است؟
برای قبول این تساوی، می بایست درباره **U** یکی ازچند حالت ممکن زیر را مفروض گرفت، که پذیرش هریک از آنها، ابهام موجود را برطرف می سازد:
۱) اگردریک رده هیچ مجموعه ای نباشد، یک حالت آن است که دراین رده هیچ مجموعه ای قابل تصریح نیست.( رجوع کنید به اصل موضوع تصریح دربخش« چالش با قضیه کانتور») بعبارت دیگر، هیچ عضوی ازمجموعه های این رده تعیّن پذیر نیست. درچنین وضعی، رده مذکور تهی است و درآن هیچ مجموعه ای قابل تصریح نیست.
اعضاء مجموعه های $A_i$ نامعین درنظر گرفته می شوند و دراین حالت اشتراک آنها شامل اعضایی خواهد شد که چون نامعین هستند، می توانند شامل هرعضو از **U** باشند.
دردیدگاهی نامتعارف، **U** آنچنان مجموعه ای است که نمی توان یک رده از زیرمجموعه ها را ازآن بدست داد. هیچ *بخشی*( یا زیرمجموعه ای) از **U** قابل تصریح و تعیّن نیست و اشتراک این بخش های نامعین که رده ای تهی را تشکیل می دهند، بخشی از**U** است که می تواند شامل هرعضوی ازآن باشد.
بطورخلاصه، یا عدم تعیّن درمورد - اعضاء- برخی از زیرمجموعه های **U** وجود دارد یا عدم تعیّن درمورد تمام اعضاء **U** صادق است.
۲) **U** بطورنامتعارف آنچنان است که با گسترش خود - به دلیل عدم ثبات آن- همه اعضاء را دربرمی گیرد، اما همواره مجموعه هایی هستند که از **U** فراتر می روند و **U** شامل تمام اعضاء آنها نیست و **U** تنها بخشی از آنها را دربرمی گیرد که اشتراک این بخش ها می تواند **U** باشد.
به بیانی روشن تر، چنین مجموعه هایی نسبت به **U** قابل تصریح نیستند و یک رده تهی را تشکیل می دهند که اشتراک آنها **U** است، اما **U** با گسترش خود، آنها را دربرمی گیرد و قابل تصریح می سازد ولی باز مجموعه هایی نسبت به آن غیرقابل تصریح می شوند و این روند تا بی نهایت ادامه می یابد.
به این ترتیب، رده ای تهی ازمجموعه ها نسبت به **U** ، بطورمطلق قابل طرح نیست و این رده ها نسبی بوده و براساس گسترش **U** تغییر می کنند. بعبارت دیگر، تمامیت **U** قابل تصریح نیست و فرض دربرداشتن همه اعضاء درمورد **U** امری ساختنی می شود و **U** فقط به طریقی قابل تصریح است که بطورنسبی مجموعه هایی نسبت به آن قابل تصریح نیستند و یک رده تهی را تشکیل می دهند که اشتراک آنها **U** است.
**U** به حکم اینکه مجموعه مرجع است و همه اعضاء را دربردارد، اشتراک یک رده تهی ازمجموعه هاست که بطورنسبی با گسترش **U** تغییر می کنند.
۳) **U** به عنوان تمامیتی« خودْ بَسنده» درنظر گرفته شود که خود آن بخش ناپذیر( *بخش* دراینجا به معنی زیرمجموعه subset ) از آن است و رده ای تهی فرض می شود. بیان خود یک مجموعه امکان پذیر نیست. خود **U** ، مجموعه ای نیست که از آن بخش شدنی باشد و **U** به عنوان کلیت تکرار شونده ی خود بسنده، با یک رده تهی نشان داده می شود. اشتراک این رده تهی همان اشتراک رده ی خودهای غیر قابل تصریح **U** است که همان **U** می شود.
اشتراک خودهای بخش ناپذیر، تنها در واقع شدگی یکتای تمامیت **U** است. هرعضو از**U** اشتراک خودهای بخش ناشدنی از آن است.
۴) **U** به عنوان مجموعه مرجع در فضای مورد بحث معینی، متعلق به مجموعه ای بزرگتر یا زیرمجموعه ای از یک مجموعه باشد: دراین صورت، یک رده ازمجموعه ها ممکن است در**U** قابل تصریح نباشد و رده ای تهی محسوب گردد، اما اشتراک آنها **U** باشد. دراین حالت، تمامیت **U** قابل تصریح است.

نتیجه: هیچ کدام از فرض های فوق به هنگام کاربرد تساوی مذکور، ملحوظ نمی گردد و درواقع مجموعه مرجع همواره بطورمتعارف درنظر گرفته می شود، گرچه تنها مبنایی نامتعارف برای **U** می تواند تساوی فوق را توضیح دهد.
بنابراین، تساوی مذکور بر اندیشه ای پنهان استوار است که از اصول نظریه مجموعه ها فراتر می رود و هیچگاه بطور ریاضی به آن اشاره ای نمی شود.

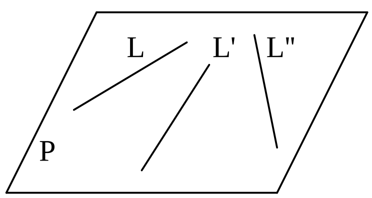
## ابهام کلیت درمجموعه ها




این موضوع را با مثالی نشان می دهیم:

A ، مجموعه ی نقاط واقع برخط L از صفحه P است: $A = \{ a , b , c , \ldots \}$

B ، مجموعه ی خطوط واقع بر صفحه P است: $B = \{ L , L' , L'' , \ldots \}$




C ، مجموعه ی مجموعه نقاط واقع بر خطوط روی صفحه P است:

$$C = \{ \{ a , b , c , \ldots \} , \{ a' , b' , c' , \ldots \} , \{ a'' , b'' , c'' , \ldots \} , \ldots \}$$

ملاحظه می شود که $A \in C$ .

اکنون نکات زیر را مورد توجه قرار می دهیم:

۱) مجموعه A بدون توجه به ایده ی تمامیت خط L بدست می آید. مجموعه A صرفاً اجزاء تشکیل دهنده ی خط L را مفروض می گیرد.
۲) در مجموعه B ، تمامیت خط L مفروض است. L به عنوان عضوی ازمجموعه B ، نمادی از تمامیت خط L است.
مجزا شدن هرخط از خط دیگر بر روی صفحه P ، تمامیت آن را القاء می کند.
۳) هرعضو ازمجموعه C ، مجموعه ای است که تمامیت درآن ملحوظ است.
۴) ملاحظه می شود که ایده های ملحوظ در مجموعه A و در مجموعه A به عنوان عضوی از مجموعه C یکسان نیستند. با این وجود، این دو مجموعه به شکل یکسانی نمایش داده می شوند.
۵) مجموعه A صرفاً واقع شدن نقاط بر خطی را نشان می دهد؛ مجموعه A به عنوان عضوی از مجموعه C بر مجزا شدن مجموعه A از دیگر اعضاء مجموعه C اشاره دارد، لذا مجموعه A به عنوان عضوی از C موضعی بیرونی به خود می گیرد.
۶) مجموعه A بر دربردارندگی صرف اشاره دارد و کلیتی را نشان می دهد که در خود، کلیتی به کمال است.
۷) مجموعهA به عنوان عضوی از C به این خاطر بار بیرونی دارد که به عنوان یک کلیت از سایر اعضاء C جدا و مجزا می گردد.

نتیجه: این نکات در نظریه مجموعه ها مستتراند، اما بصورت اصل موضوع درنیامده اند و یا نمادگذاری های جداگانه نیافته اند.

## اعدادی درفواصل بی نهایت کوچک

عدد حقیقی $x = ۰/ a_۱ a_۲ a_۳ \ldots$ را در بازه ی ( ۱, ۰) درنظرمی گیریم. عدد جدیدی را به صورت $y = ۰/ a_۱ a_۲ a_۳ \ldots , b_۱ b_۲ b_۳ \ldots$ می توان پذیرفت، که تفاضل $y - x$ ، عدد بی نهایت کوچک $۰/ ۰۰۰ \ldots , b_۱ b_۲ b_۳ \ldots$ خواهد بود.
به همین ترتیب می توانیم $z = ۰/ a_۱a_۲a_۳ \ldots , b_۱b_۲b_۳ \ldots , c_۱c_۲c_۳ \ldots$ و $t = ۰/ a_۱ a_۲ a_۳ \ldots , b_۱ b_۲ b_۳ \ldots , c_۱c_۲c_۳ \ldots , d_۱d_۲d_۳ , \ldots$ و درنهایت $s = ۰/ a_۱ a_۲ a_۳ \ldots , b_۱ b_۲ b_۳ \ldots , c_۱ c_۲ c_۳ \ldots , \ldots , \ldots , k_۱ k_۲ k_۳ \ldots , \ldots$ را درنظر بگیریم که از بی نهایت سلسله و هر سلسله از بی نهایت عدد تشکیل شده است.
اعداد y و z و t و ... و s اعدادی هستند که بی نهایت به هم نزدیک اند و فاصله شان از عدد حقیقی x بی نهایت کوچک است.
چنین اعدادی را که فاصله شان از یک عدد حقیقی بی نهایت کوچک باشد، درکنارهرعدد حقیقی معینی می توان درنظر گرفت.

## بررسی یک پرسش متناقض

هرخط براساس بی نهایت نقطه واقع بر یک امتداد معین تعریف می شود. هرنقطه ازخطی معین، برخطهای بی شمار دیگری که ازآن نقطه می گذرند، واقع است.
خط L را درنظر می گیریم. ازنقطه ای واقع بر آن، حداقل یک خط می گذرد که بر خط L واقع نیست.
حال این پرسش پارادوکسیکال را مطرح می کنیم که در کدام نقطه از L ، L گذرنده بر آن نقطه، برL واقع نیست؟ بعبارت دیگر، آیا می توان خط L را خطی درنظر گرفت که در یک نقطه از آن، بر خودش منطبق نباشد؟ یا در کدام نقطه ازL ، L بر خود منطبق نیست؟
چنین نقطه ای را« حامل غیرانطباقی L » می نامیم. این نقطه، در صورت وجود، L را بصورت خطی غیر منطبق بر L نشان می دهد.
به چند طریق متفاوت و با پیش فرض های متباین به پرسش فوق پاسخ داده می شود:

۱) L به صورت خطی غیر واقع بر L غیرممکن است و L به صورت منطبق بر L معنا می یابد، پس نقطه ای که حامل خط غیر منطبق برخود آن باشد، وجود ندارد.

۲) L اساساً بصورت غیرمنطبق بر L واقع می شود: بیان L بصورت منطبق بر L ، L را بطور پیشین مفروض می گیرد.
هرنقطه از L حامل خط یکتای غیرمنطبق بر L است که همان واقع شدگی یکتای L است و L پیشینی را نفی می کند.

« پس از» وقوع L نقاط روی آن مفهوم دار می شوند و به صورت حامل انطباقی( یعنی L منطبق بر L ) درمی آیند: زیرا حداقل دو نقطه باید مفروض باشد تا خطی معین گردد، اما وقوع L مقدم بر این حداقل نقاط است.
حامل غیرانطباقی بودن یک نقطه از یک خط، نقطه دیگری ازآن خط را- بدلیل وقوع یکتای L- برای خط مذکور، محل گذر قرار نمی دهد.
به این ترتیب، وقوع L ، نقاط واقع برآن و حامل غیرانطباقی شدن آنها را معنادار می کند.

۳) L در وضعیتی نامعین باشد: در چنین حالتی، هیچ نقطه ای بطور قطعی حامل خط منطبق بر L نخواهد شد. پس هرنقطه ای حامل خط غیرمنطبق بر L است.

۴) نقطه ای واقع بر امتداد L دربی نهایت، L را بطورغیرانطباقی نشان می دهد.

$L \quad \rightarrow \infty \qquad\qquad \leftarrow \infty$

****

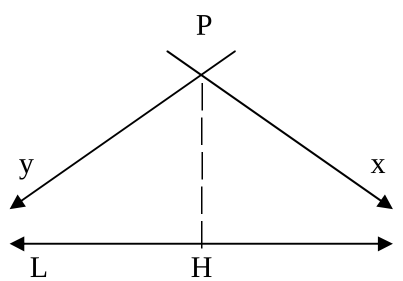
## فصل پنجم: معرفی یک هندسه جدید **An Introduction to a New Geometry**

دراین فصل، یک اصل توازی نااقلیدسی non-Euclidean را ارائه خواهیم کرد که برای اولین بار درجهان ریاضی( March 1999 ) مطرح می شود.

### مختصری از هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی

درهندسه اقلیدسی Euclidean geometry ، خط راست نامتناهی فرض می شود. دراین هندسه بنا براصل توازی، ازنقطه غیر واقع بر خط L ، یک و فقط یک خط می گذرد که آن خط را قطع نمی کند. هرخط موازی با L را می توان به عنوان خطی درنظر گرفت که L را در نقطه ای واقع در بی نهایت قطع می کند که چنین نقطه ای، نقطه ی بی نهایت دور نامیده می شود.
نقطه بی نهایت دور را، نقطه ی وهمی ideal point نیز می نامند. درهندسه اقلیدسی، هرخط راستی فقط یک نقطه بی نهایت دور دارد.

هندسه مسطح لباچفسکی- بولیایی Lobachevsky-Bolyai ( هندسه هذلولوی Hyperbolic geometry ) نیز چنان بیان می شود که درآن خط راست نامتناهی است.
اصل موضوع axiom این هندسه که جانشین اصل توازی اقلیدسی می شود، چنین است: برنقطه غیر واقع برخطی، بیشتر از یک خط می گذرد که آن خط را قطع نمی کنند.
در شکل ۱، بر اساس این اصل همواره دو خط وجود دارند که برP می گذرند و با خط L موازی می شوند. ثابت می شود که این دوخط، با عمودی که ازP برL فرود می آید، زاویه های حاده متساوی تشکیل می دهند.




( شکل ۱)

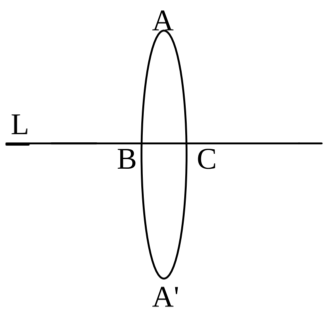
دراین شکل، دو خط Px و Py با L موازی اند. این دو خط را دو موازی با L یا دو موازی حدی Limiting Parallel می نامند. زاویه های HPx و HPy حاده و متساوی اند.
دراین هندسه، هرخطی که برP بگذرد و در داخل زاویه بین این دوخط موازی واقع شود، L را قطع می کند. هرخط دیگری که برP بگذرد و خارج ازاین زاویه واقع باشد، L را قطع نمی کند؛ که این خطوط نیز ازدیدگاه اقلیدسی با L موازی اند، اما درهندسه هذلولوی عموماً چنین خطوطی را نامتقاطع non-intersecting یا ناقاطع نسبت به L می نامند.
اندازه زاویه ای که هریک از دو موازی با عمود وارد ازP برL می سازد، با h طول این عمود بستگی دارد. این زاویه را زاویه توازی برای فاصله h می نامند.
زاویه توازی برای هر فاصله h ثابت است. هرگاه فاصله h بزرگتر شود، زاویه توازی کوچکتر می شود و هرگاه این فاصله کوچکتر شود، زاویه توازی بزرگتر می شود.
هر فاصله ای ، زاویه توازی متناظر با آن دارد و برای هر زاویه حاده ای ، فاصله ای متناظر با آن وجود دارد که آن زاویه ، زاویه توازی آن فاصله است.
بنابراین، درهندسه لباچفسکی- بولیایی، خط راست دو نقطه ی بی نهایت دور یا وهمی دارد که همه خطهایی که در دو امتداد با آن و درنتیجه با یکدیگر موازی باشند، بر یکی از آن نقاط می گذرند.

درهندسه ریمانی( هندسه بیضوی Elliptic geometry ) ، خط نامتناهی نیست. ریمان Rieman برای اولین بار، میان مفاهیم بی مرزی و نامتناهی بودن تمایز قائل شد.
وی خاطرنشان ساخت که هر قدرهم به بی انتها بودن خط راست معتقد باشیم، لزوماً نمی توان نتیجه گرفت که خط، نامتناهی است. به این ترتیب، دراین هندسه به جای فرض اقلیدسی نامتناهی بودن خط، اصل ملایمتری قرارمی گیرد که چنین است:
اصل موضوع . هرخط راستی بی مرز است.

اصل موضوعی که درهندسه بیضوی جایگزین اصل توازی اقلیدس Euclid ( ۳۰۶ تا ۲۸۳ ق. م ) می شود، ازاین قراراست:

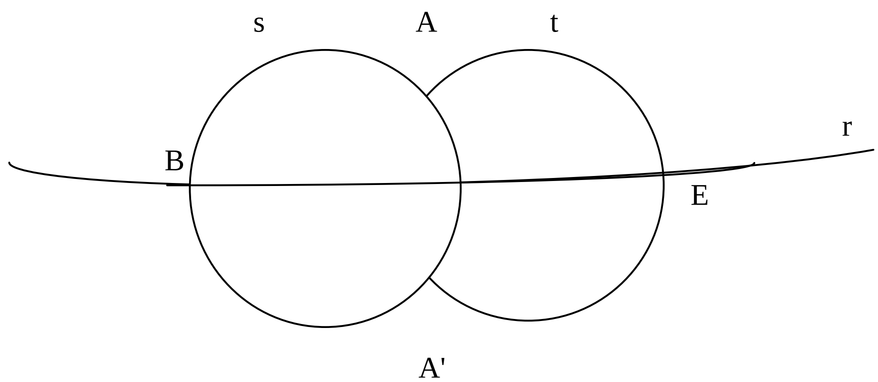
دو خط راست همیشه تقاطع می کنند.
دراین هندسه به سادگی ثابت می شود که عمودهایی که از همه نقاط خطی برآن وارد می شوند، دریک نقطه تقاطع می کنند که این نقطه، قطب pole آن خط نامیده می شود. درشکل ۲، در دو نقطه B و C از L ، خطهای عمود بر L رسم شده اند که این دو خط در A که یک قطب ازخط L است، تقاطع می کنند.

دراین شکل، خطوط چنان رسم شده اند که گویی منحنی اند، اما باید توجه داشت که خطوط هندسه بیضوی به اندازه خطوط هندسه اقلیدسی و هذلولوی، راست هستند. دراینجا، نشان دادن« رابطه» ی بین خطوط ازطریق رسم آنها بصورت منحنی، آسانتر و مناسب تر است.




( شکل ۲)

هرخطی دو قطب دارد، که این دو می توانند منطبق برهم باشند. هرخطی که یک نقطه ازخطی را به قطب آن وصل کند، برآن خط عمود است. فاصله عمودی قطب ازخط ، همواره یکی است و برای همه خطها، فاصله قطب ازخط یک مقدار ثابت است. این فاصله عمودی را با q نشان می دهیم.
اگر s و t دوخط دلخواه باشند( شکل ۳)، درنقطه ای مانند A همدیگر را قطع می کنند. روی هرخط و درهرامتداد از A ، پاره خطی مساوی q جدا می کنیم: یعنی AB و AC و AD و AE به طول q هستند. ( C نقطه تقاطع s و r ؛ D نقطه تقاطع t و r )
دراین حالت، B و C و D و E روی خطی واقع اند( خط r ) که A قطب آن است. A' قطب دوم r است و t و s در A' هم تقاطع می کنند.




( شکل ۳ )

بنابراین، دوخط دراین هندسه همیشه یک عمود مشترک دارند و در دو نقطه تلاقی می کنند. هرخط به روی خود بازمی گردد و بسته و متناهی است و به طول ۴q است.
به این ترتیب، درهندسه بیضوی، خط راست نقطه بی نهایت دور ندارد.

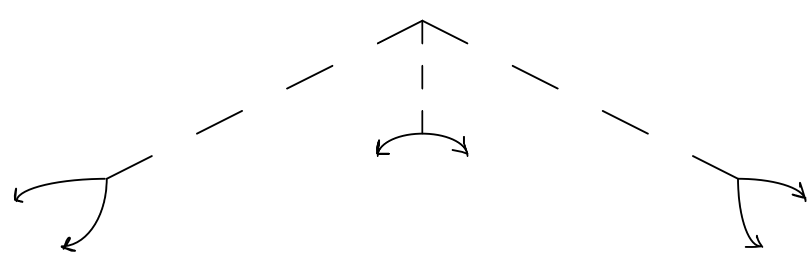
## مدخل

یکی ازاحکامی که اقلیدس آن را اصل موضوع قرار داده است، چنین است: « امتداد دادن هرخط راست متناهی به خطی راست( نامتناهی).»
ازاین اصل چنین برمی آید که خط راست را پیوسته دریک امتداد می توان ادامه داد. علاوه برآن، اقلیدس براساس این اصل، خط را نامتناهی فرض می کند. ( گذشته ازاین که این اصل الزاماً مبین آن نیست که خط نامتناهی است؛ نکته ای که ریمان آن را مطرح ساخت.)
ازسوی دیگر، اقلیدس دراثبات برخی ازگزاره ها مانند گزاره اول خود( پاره خطی داده شده است، مثلث متساوی الاضلاعی وجود دارد که این پاره خط یک ضلع آن است.) و همچنین در رسم عمود بر یک خط، بطور ضمنی از اصل پیوستگی استفاده می کند.
دراین اثباتها و موارد دیگر، خطها و دایره ها رسم می شوند و « وجود» نقاط تلاقی خط وخط و خط ودایره و دایره ودایره ، بدون هیچ اثباتی فرض می شوند.
روشن است که وجود چنین نقاطی را یا باید اثبات کرد یا به صورت اصل موضوع گرفت. بعبارت دیگر، اصل موضوعی لازم است که به همه خطها و دایره ها خاصیتی را نسبت دهد که پیوستگی continuity نامیده می شود. چنین کاری توسط اصل موضوع ددکیند Dedekind امکان پذیر می شود، که ازاین قراراست:

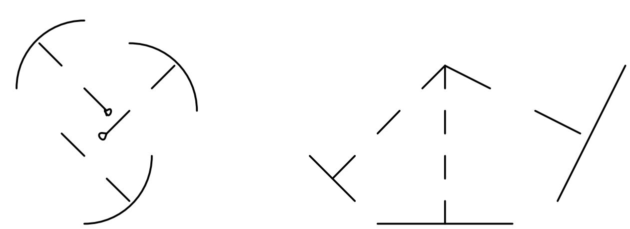
« هرگاه همه ی نقطه های خط راستی به دو رده تقسیم شوند، چنان که هرنقطه ی رده ی نخستین درطرف چپ هرنقطه ی رده ی دومین واقع شود، آنگاه یک، و فقط یک، نقطه وجود دارد که این تقسیم نقاط به دو رده را بوجود می آورد و بدین نحو خط راست را به دو جزء تقسیم می کند.»
با این مقدمه، ازفرض اقلیدس درباره ی نامتناهی بودن خط و استفاده ی ضمنی او از پیوستگی، اینطور استنباط می شود که هرخط راست متناهی را می توان از هرطرف فقط به یک طریق امتداد داد و امتداد یافتن آن امری پیوسته است.
دراینجا، این مسئله پیش می آید که هر قدر هم که روی خطی پیش برویم و شاهد پیوستگی و بی انتهایی آن باشیم، باز نمی توانیم از نبود ناپیوستگی درآن مطمئن شویم و لزوماً نمی توان نتیجه گرفت که خط پیوسته است.
اما با چنین استدلالی، حکم به درستی ناپیوستگی به نحوی که از صحت آن نتوان اطلاع حاصل کرد، تنها یک توهم است.
چنین حکمی درباره ی یک خط، تنها زمانی قابل قبول است که خط در ساختار متفاوتی که از استدلال فوق برمی آید، از چنان خصوصیاتی برخوردار شود که چنین حکمی درباره آن قابل حصول باشد.
برای دریافتن این ساختار، تصور می کنیم که چند خط نامتناهی درامتدادهای متفاوت واقع شوند، بطوری که دو به دو نقطه ی مشترکی نداشته باشند، آنگاه می توان این چند خط را به عنوان ' یک خط ' تلقی کرد که پیوستگی هر« قطعه» ازاین' خط ' درامتدادهای متفاوت است.
بعبارت دیگر، خط مذکور به عنوان یک کل، فاقد امتداد معینی است که درآن طریق قابل امتداد باشد وعلاوه براین، هیچ دو قطعه ای ازآن، نقطه مشترک ندارند.
به این ترتیب، با چنین فرضی درباره ی خط و نقاط واقع برآن،« نوعی ناپیوستگی» درباره خط مورد نظر به عنوان یک کل پذیرفته می شود.
این شکل از ناپیوستگی را می توان همچنین درمورد چند خط متناهی که دریک امتداد واقع نیستند و هیچ کدام نقطه مشترکی با یکدیگر ندارند، بکار برد. با این شرح، به جای فرض اقلیدس درباره خط، اصل موضوع زیر را قرار می دهیم:
اصل موضوع . هرخط متشکل از قطعاتی مجزا( متناهی یا نامتناهی) است، به نحوی که هیچ دو قطعه ای امتداد یکسان و همچنین نقطه مشترک ندارند. ( تعداد قطعات می تواند متناهی یا نامتناهی باشد.)

باید توجه داشت که تعداد قطعات هرخط و همچنین متناهی یا نامتناهی بودن هرقطعه، به صفحه ای که خطوط درآن واقع می شوند، بستگی دارد.
به عنوان مثال، دریک صفحه هرخط متشکل از چهارقطعه ی نامتناهی و درصفحه دیگر، هرخط متشکل از سه قطعه ی راست متناهی است، بطوری که در مورد خطوط واقع درهر دو صفحه، اصل موضوع فوق صادق است.
اکنون براساس این اصل، خطوط شکل ۴ را مورد توجه قرارمی دهیم:
در الف، سه قطعه ی نامتناهی هریک با سرشتی هذلولوی، یک خط را تشکیل می دهند.
در ب، سه قطعه ی راست متناهی، سه قطعه از یک خط است.
در ج، سه قطعه ی متناهی که هر یک کمانی از سه دایره با شعاع مساوی ولی مراکز متفاوت است، یک خط را تشکیل می دهند.

( الف)



( ج )　　( ب)



( شکل ۴)

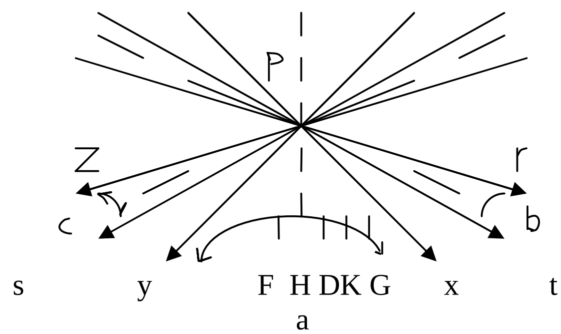
## اصل موضوع سرشتنمای هندسه جدید

براساس اصل موضوع ذکرشده برای خط، اکنون می توانیم اصل موضوع توازی زیر را درمورد بعضی ازخطوطی که دراصل فوق الذکر صدق می کنند، مطرح نماییم. اما پیش ازآن، متقاطع یا موازی بودن« یک قطعه را نسبت به یک خط» تعریف می کنیم:
۱) قطعه ای نسبت به یک خط، متقاطع است اگرحداقل با یک قطعه ازآن خط، یک نقطه مشترک داشته باشد.
۲) قطعه ای نسبت به یک خط، موازی است اگر با هیچ قطعه ای ازآن خط، نقطه مشترک نداشته باشد.

اصل موضوع سرشتنما. ازنقطه غیرواقع بر یک خط، n دسته از قطعات( هردسته شامل بی نهایت قطعه) می گذرد که آن خط را قطع نمی کنند و هردسته از دسته دیگر توسط دسته ای از قطعات که برآن نقطه می گذرند و خط مورد نظر را قطع می کنند، مجزا می شود.( n یک عدد طبیعی است.)

n دراین اصل، به تعداد قطعات خط وچگونگی واقع شدن آنها نسبت به هم بستگی دارد. برای مقاصد نزدیک، ازخطوطی که از قطعات ناهمگون متشکل شده اند، مانند ترکیبی از قطعات مختلفی که درشکل ۴ نشان داده شده اند، چشم پوشی می کنیم و ابتداء مواردی را بررسی می کنیم که قطعات نامتناهی یک خط، سرشت هذلولوی دارند.

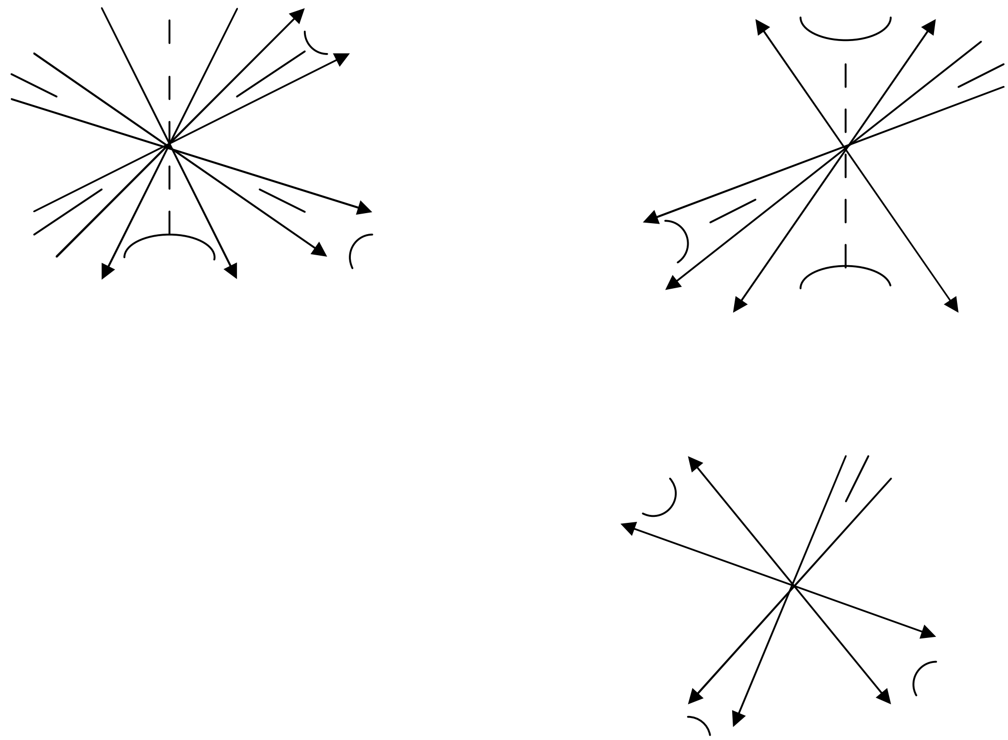
فرض می کنیم در صفحه ای، هرخط از۳ قطعه ی هذلولوی نامتناهی تشکیل شده باشد. خط L متشکل از سه قطعه a ، b ، c و نقطه ی P غیر واقع برآن را درنظر می گیریم.( شکل ۵)




( شکل ۵)

براساس اصل سرشتنما، قطعاتی که از P می گذرند و در داخل زاویه yPx واقع اند، a را قطع می کنند و با دَوران عمود PH حول P مثلاً مخالف عقربه های ساعت، قطعه ی حامل این عمود تا مدتی قطعه a ازخط L را قطع می کند و سپس به اولین قطعه ی موازی با a می رسیم که با Px مشخص شده است.
باید توجه داشت که آخرین قطعه ی متقاطع با a وجود ندارد، زیرا اگر فرض کنیم که PK آخرین قطعه متقاطع را مشخص می کند و طول دلخواه KG را روی a جدا کنیم، آنگاه PG ، قطعه a را درنقطه ی G قطع می کند و این تناقض است.
بنابراین، قطعه ی جداکننده ی دسته قطعات متقاطع ناحیه ی yPx از دسته موازی ناحیه ی xPt ، اولین قطعه از ناحیه ی موازی است.
پس ازآن با ادامه ی دوران تا مدتی L قطع نمی شود و سپس وارد ناحیه متقاطع می شویم که شامل قطعات واقع در داخل زاویه ی tPr است.
با استدلالی مشابه قبل، می توان نشان داد که ناحیه موازی xPt ، که قطعات Px و Pt را هم شامل می شود، از ناحیه ی متقاطع واقع در داخل زاویه tPr توسط آخرین « قطعه ناقاطع» نسبت به قطعه a از ناحیه ی yPx ، مجزا می شود.
آخرین قطعه ی ناقاطع نسبت به ناحیه yPx یعنی قطعه Pt ، با شروع از ناحیه ی متقاطع tPr و دوران درجهت عقربه های ساعت، اولین قطعه ی موازی نسبت به قطعه b خواهد بود. بعبارت دیگر، اولین قطعه ی متقاطع از ناحیه ی متقاطع واقع در داخل زاویه tPr وجود ندارد و به همین ترتیب الی آخر.
درهر ناحیه متقاطع، ازنقطه P یک قطعه بر هرقطعه ازخط L عمود می شود. می توان نشان داد که درهر ناحیه ی متقاطع، قطعه ی عمود بر L ، نیمساز زاویه ای است که دسته قطعات متقاطع واقع درآن ناحیه را دربرمی گیرد.
برای مثال، درناحیه ی متقاطع yPx نشان می دهیم که دو زاویه ی yPH و xPH مساوی اند:
فرض کنیم چنین نیست، درنتیجه برای مثال زاویه ی yPH بزرگتر از زاویه ی xPH خواهد بود. ازنقطه P قطعه ای در درون زاویه ی yPH رسم می کنیم به نحوی که زاویه بین آن وعمود PH ، مساوی زاویه ی xPH باشد. این قطعه، L را درنقطه ای مانند F قطع می کند.
درطرف دیگر نقطه ی H ، بر قطعه a ، HD را مساوی HF جدا می کنیم.
دو مثلث PHF و PHD برابرند، درنتیجه زاویه DPH مساوی زاویه FPH و بنابراین مساوی زاویه ی xPH است.
پس قطعه ی Px ، قطعه ی a از L را قطع می کند. اما این یک تناقض است. به این ترتیب، زاویه های yPH و xPH مساوی اند.
باید توجه داشت که زاویه ی sPz ممکن است با زاویه tPr مساوی باشد، اما لزوماً چنین نیست و ممکن است این دو زاویه نامساوی باشند.
همچنین زوایای xPt و yPs لزوماً مساوی نیستند.

شکل ۶، حالتهای دیگری از سه قطعه نامتناهی هذلولوی از یک خط را نمایش می دهد:



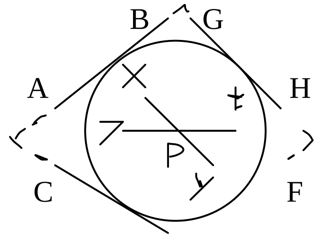
( شکل ۶)

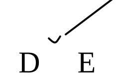
با توجه به اصل موضوع سرشتنما و در صورتی که قطعات یک خط هذلولوی باشند، نتیجه می شود که هرخطی که شامل n قطعه ی هذلولوی نامتناهی است، $n^2$ نقطه ی بی نهایت دور دارد.

****

اکنون حالتی را بررسی می کنیم که درآن هرخط از قطعاتی متناهی و به تعداد معین تشکیل شده است. دراین حالت، سه وضعیت خاص ممکن است: ۱) قطعات راست باشند. ۲) قطعات سرشت هذلولوی داشته باشند. ۳) قطعات سرشت بیضوی داشته باشند.

برای مقاصد نزدیک، خطوطی را که از قطعات ناهمگون تشکیل شده اند، به کنارمی نهیم. دراینجا درباره وضعیت اول و سوم بحث می کنیم.
در مورد وضعیت اول، برای اینکه اصل موضوع سرشتنما صادق باشد، قطعات یک خط می بایست به نحوی خاص نسبت به هم واقع شوند و ازسوی دیگر، هرنقطه ای را نمی توان به عنوان یک نقطه ی غیرواقع برآن خط درنظر گرفت.
همچنین با توجه به صدق اصل موضوع سرشتنما، هرقطعه ای که از یک نقطه غیرواقع برخطی می گذرد، نسبت به آن خط به عنوان یک قطعه قابل تعریف نیست. برای نشان دادن این نکات، به بررسی یک حالت خاص می پردازیم:
فرض کنیم قطعات یک خط، هریک بخش هایی ازاضلاع یک چند ضلعی محیطی دلخواه باشند،( چند ضلعی محیطی آن است که همه اضلاعش بریک دایره مماس باشند؛ که این دایره را دایره محاطی چند ضلعی گویند.) به نحوی که این قطعات شامل نقطه ی مماس نیز باشند.( شکل ۷)
دراین شکل، قطعات AB ، GH ، EF و CD که بر یک چهار ضلعی محیطی واقع اند، یک خط را تشکیل می دهند.



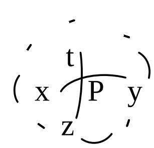



( شکل ۷)

با چنین فرضی، برای هرخط ازاین نوع، نقطه ای هست که ازآن می توان یک قطعه برهرقطعه ازآن خط عمود کرد:
این نقطه، مرکز یک دایره محاطی است. دراین حالت خاص، چنین نقطه ای را قطب آن خط می نامیم.
نقاط غیرواقع بریک خط را به عنوان نقاط واقع در درون چند ضلعی محیطی ای که خط مورد نظر را دربردارد، تعریف می کنیم. قطعاتی که ازنقاط غیرواقع برچنین خطوطی می گذرند، به عنوان قطعاتی متناهی تعریف می شوند که ازچند ضلعی محیطی فراتر نمی روند و یک و فقط یک انتهایشان برچند ضلعی محیطی دربردارنده ی آن خط واقع است.
اگرچنین حدودی برای تعریف قطعه درنظرگرفته نشود، با قطعاتی مانند xy و zt درشکل ۷ مواجه می شویم که متقاطع نیستند و درصورتی که آنها را موازی درنظر بگیریم، یک درمیان قرار گرفتن دسته قطعات موازی و متقاطع، درمواردی نقض می شود واین امر با اصل موضوع سرشتنما تعارض دارد. بنابراین، تعریف مذکر برای قطعه، چنین قطعاتی را که نه متقاطع اند و نه موازی، ازمیان برمیدارد.
قطعاتی که ازیک نقطه غیرواقع برخطی می گذرند و با چند ضلعی محیطی دربردارنده آن خط برخورد نمی کنند یا برخورد کرده ولی از چند ضلعی محیطی فراترنمی روند، نسبت به آن خط به عنوان یک قطعه، تعریف پذیر نیستند.
همچنین می توان نقاط و قطعاتی را دریک فضای اقلیدسی، خارج ازصفحه ی خط مورد نظر، به نحوی تعریف کرد که اصل موضوع سرشتنما درمورد آنها و خط مذکور صادق باشد.
این مثال نشان می دهد که حاکمیت- یا قبول- اصل موضوع سرشتنما موجب می شود که فقط خطوطی با آرایش معین ازنظر قطعات- بتوانند- این اصل را برآورده سازند و درواقع با این برآورده ساختن، به عنوان یک خط ازصفحه ای که این اصل موضوع درآن صدق می کند، محسوب گردند.
اصل موضوع سرشتنما، تمامی خطوطی را که دراصل موضوع ذکرشده برای خط صدق می کنند، شامل نمی شود و همه آنها را به عنوان یک خط مورد پذیرش یا شناسایی قرار نمی دهد.
همچنین ملاحظه گردید که قطعات و نقاط غیرواقع بر یک خط، می بایست نسبت به خطی معین تعریف شوند؛ درواقع این« نسبیت»، کاربرد و شمول اصل موضوع سرشتنما را ممکن می سازد.

****

اکنون ساده ترین حالت ممکن را درمورد خطوطی که سرشت بیضوی دارند، بررسی می کنیم:
کمان هایی از یک دایره ی بزرگ از یک کره را( مانند دایره ی شکل ۸) به عنوان قطعات یک خط درنظرمی گیریم. نقاط غیرواقع بر چنین خطی، به عنوان محل برخورد دایره های بزرگی که بر دایره مذکور عمودند، تعریف می شوند.
بنابراین، برای هرخطی دو نقطه ی غیرواقع برآن وجود دارد. این نقاط را قطبهای آن خط می نامیم.
حال می بایست با توجه به اصل موضوع سرشتنما، برای قطعاتی که ازنقاط غیرواقع برخطی می گذرند، تعریفی قائل شویم.
روشن است که این قطعات بر روی دایره های بزرگی که بر دایره دربردارنده آن خط عمودند، واقع شده و طولشان ازمحیط این دایره ها کمتراست. ازسوی دیگر، هرقطعه می بایست دایره ی دربردارنده خط مذکور را در یک و فقط یک نقطه قطع نماید، که به این ترتیب، قطعاتی که نه متقاطع اند و نه موازی( مانند قطعات xy و zt درشکل ۸) و با اصل موضوع سرشتنما تعارض دارند، کنارگذاشته می شوند.
همچنین قطعاتی که دو قطعه ی متقابل ازخط را قطع کرده و با قطعاتی که یک قطعه ازآن دو قطعه را قطع کرده اند، تداخل پیدا می کنند و مجزا شدگی دسته قطعات را دراصل موضوع سرشتنما نقض می کنند، کنار نهاده می شوند.
بنابراین، نسبت به خطی مفروض، قطعاتی که ازنقاط غیرواقع برآن خط می گذرند و دایره ی دربردارنده ی آن خط را بطورعمودی دریک و فقط یک نقطه قطع می کنند، به عنوان یک قطعه تعریف می شوند.
این قطعات یا حداکثر یک قطعه ازخط مذکور را قطع می کنند و درنتیجه برآن خط عمود می شوند یا با هیچ قطعه ای ازخط مذکور نقطه مشترک ندارند و درنتیجه با آن موازی اند.

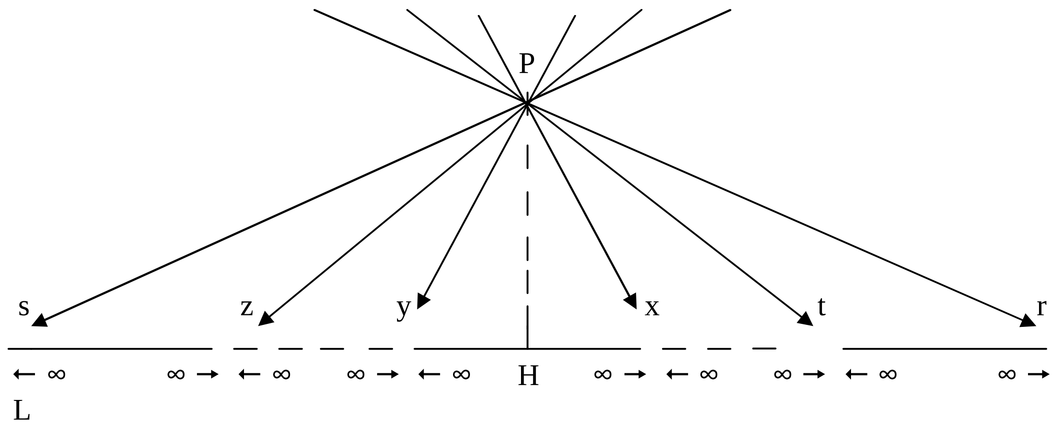



( شکل ۸ : P یک قطب از یک کره است)

## اصل موضوع جدید توازی

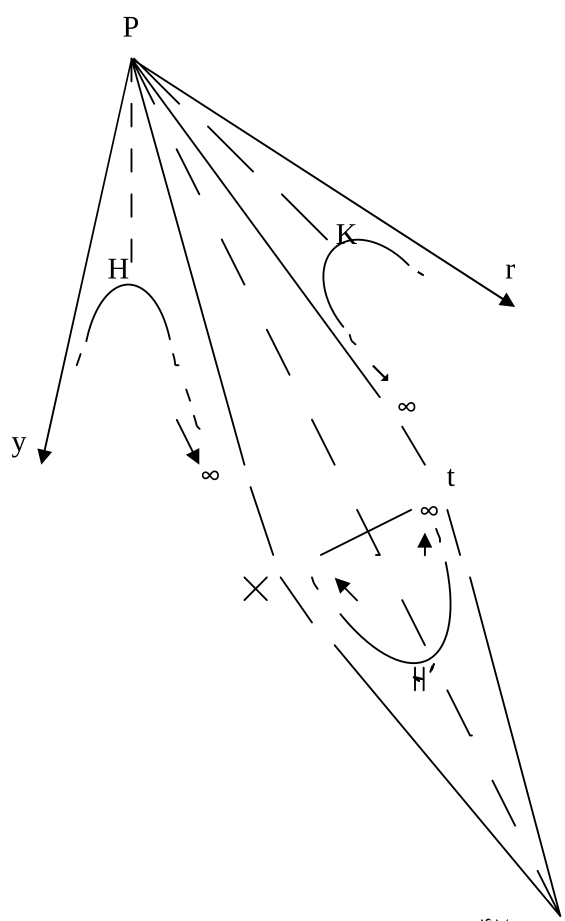
اکنون براساس ایده های برخاسته ازقطعات هذلولوی و نامتناهی یک خط ناپیوسته، طرحی را برای خط نامتناهی و پیوسته ( یعنی همان فرض ناخودآگاه اقلیدس درمورد خط) ارائه می کنیم، به نحوی که اصل موضوع سرشتنما درمورد آن صدق کند.

فرض کنیم یک خط نامتناهی و پیوسته، ۶ نقطه ی بی نهایت دور یا وهمی داشته باشد. بنابراین، برطبق اصل موضوع سرشتنما، از هرنقطه غیرواقع برآن، سه دسته خطوط ( هردسته شامل بی نهایت خط ) به موازات این خط می گذرد که هردسته از دسته دیگر توسط دسته خطوطی متقاطع با آن مجزا می شود. به این ترتیب، با پیوسته شدن خطوط، دسته قطعات دراصل موضوع سرشتنما به دسته خطوط بدل می شوند.
شکل ۹، یکی ازطرح های ابتدایی برای بررسی این حالت درباره ی خط نامتناهی و پیوسته L است. درنواحی HPx و HPy آخرین خطی که ازP می گذرد و L را قطع می کند، وجود ندارد و L بطور بی نهایت امتداد دارد.
به همین ترتیب، درنواحی xPt و yPz که دربردارنده ی خطوط موازی با L است، خط L تا بی نهایت گسترده است و امتداد می یابد.
همچنین درنواحی tPr و zPs نیز خط L تا بی نهایت امتداد دارد. علائم بی نهایت ∞ درشکل به خوبی این وضع را نشان می دهند.




( شکل ۹)

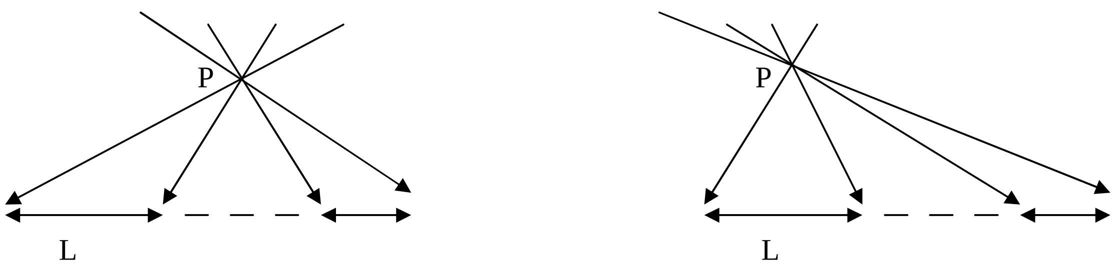
همانطور که خواننده می بایست دریافته باشد، چنین وضعیتی غیرعادی است. برای این که چنین حالتی ممکن باشد، خط L باید از سرشت ویژه ای برخوردار باشد.
درشکل ۱۰، بطور شماتیک بخشی از L را که درناحیه ی yPr واقع است، مورد بررسی قرارمی دهیم. درهر یک ازنواحی متقاطع yPx و tPr به ترتیب دو خط PH و PK بر L عمود می شوند.
زاویه های yPx و tPr به طول عمودها و زاویه های سه عمود نسبت به هم( عمود سوم در ناحیه zPs واقع است.) بستگی دارد. این سه عمود درنقطه P تلاقی می کنند و با یکدیگر موازی نیستند، که این به سبب سرشت ویژه ی خط L است.



P'

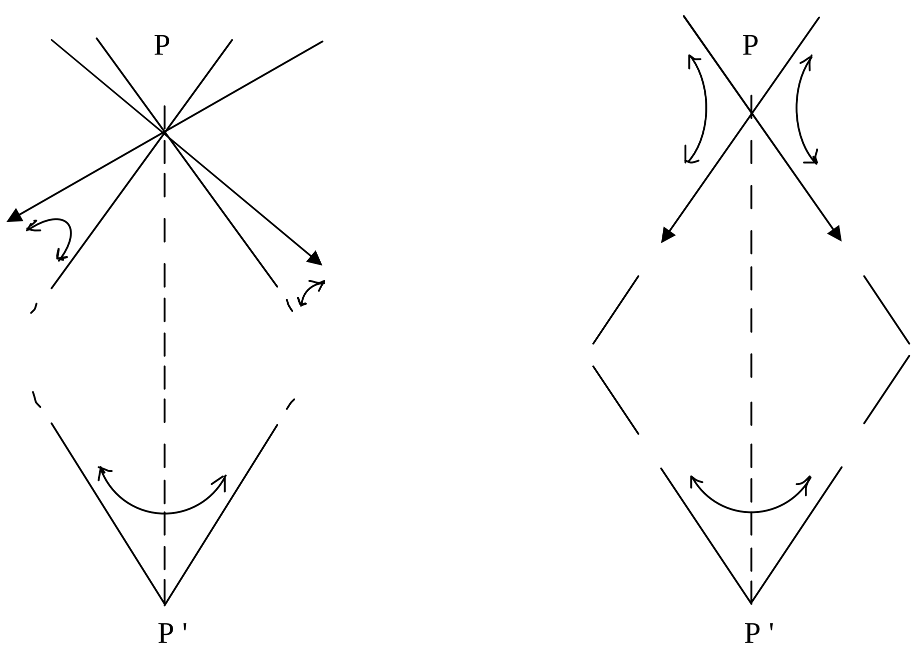
( شکل ۱۰)

نقطه تلاقی خط L و خط موازی Px ، نقطه بی نهایت دور x است که دراین نقطه، خط L تغییر جهت داده ( بنابراین، x نقطه عطف L در بی نهایت است.) و به صورت xH ' t که نامتناهی است، امتداد می یابد.( H ' نقطه عطف conjunction دیگری برای L است.)
نقطه P ' نسبت به P در بی نهایت است و P ' H ' بر بخش xH ' t از L عمود است. همچنین خطوط P ' x و P ' t با بخش xH ' t از L موازی اند. خطوطی که از P می گذرند و در ناحیه ی xPt واقع اند، امتداد نامتناهی xH ' t از L را در بی نهایت قطع می کنند و بنابراین با آن موازی اند. خط L در نقطه ی t ، که نسبت به نقطه ی H ' در بی نهایت دور واقع است، مجدداً تغییر جهت داده و وارد ناحیه ی tPr می شود( t نقطه عطف دیگر L در بی نهایت است.) و به صورت tKr که نامتناهی است، امتداد می یابد.
شبه چهارضلعی PxP ' t یک شبه لوزی است که هر ضلع آن خطی نامتناهی است.
پیشتر دیدیم که خط موازی Px ، L را در نقطه وهمی x قطع می کند و خطوطی که از P می گذرند و در ناحیه xPt واقع می شوند، نسبت به بخشی از L که در ناحیه yPx واقع است، ناقاطع اند. اگرنقطه تقاطع دو خط ناقاطع، یک نقطه ی ابروهمی ultra-ideal point نامیده شود، آنگاه خطوط ناقاطع مذکور، خط L را در نقاطی ابروهمی نسبت به بخش yHx از L قطع می کنند.
همین نقاط ابروهمی، نسبت به خطوطی که از P ' می گذرند و در داخل زاویه ی xP ' t واقع اند، فاقد خصلت ابروهمی هستند، زیرا این خطوط بخشی از L را که در ناحیه xP ' t واقع است، دراین نقاط بطورحقیقی قطع می کنند.
حال اگر خط نامتناهی و پیوسته ای، ۴ نقطه ی بی نهایت دور یا وهمی داشته باشد، درباره ی نقطه ای غیرواقع برآن، برطبق اصل موضوع سرشتنما، دو طرح ابتدایی در شکل ۱۱ ملاحظه می شود.

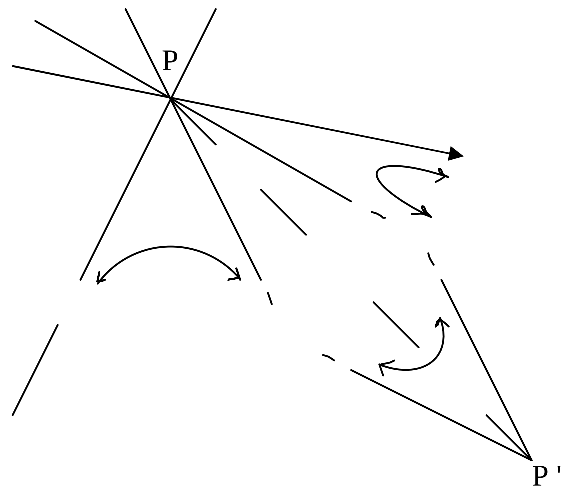



( شکل ۱۱)

در شکل ۱۲، سه حالت ممکن برای چنین خطی با توجه به سرشت آن نشان داده شده است:



( شکل ۱۲ )




( ادامه شکل ۱۲ )

به این ترتیب، با فرض اقلیدس درباره ی خط، که آن را نامتناهی و پیوسته فرض کرده بود، در هندسه مسطح مورد بحث ما، اصل موضوع سرشتنما به صورت زیر قابل تبیین است:

اصل موضوع سرشتنما. ازنقطه غیرواقع بر یک خط با ۲n نقطه ی بی نهایت دور( یا وهمی ideal point ) ،
n دسته از خطوط( هردسته شامل بی نهایت خط) می گذرند که آن خط را قطع نمی کنند وهردسته از دسته دیگر،
توسط دسته ای ازخطوط ( یا بی نهایت خط) که برآن نقطه می گذرند و خط مورد نظر را قطع می کنند،
مجزا می شود.( n یک عدد طبیعی است.)

اصل فوق، یک اصل موضوع جدید توازی است.

براساس این اصل، بی شمار خط نامتناهی و متباین وجود دارد که هریک برمبنای تعداد نقاط بی نهایت دورشان مشخص می شوند، و بطورکلی هرخط نامتناهی، ۲n نقطه ی بی نهایت دور یا وهمی دارد.§

دکترفرزاد حمیدی
ایران IRAN / تهران Tehran
۲۹ آبان ۱۳۷۹ شمسی/ November 2000

فهرست منابع


۱) تاریخ فلسفه A History of Philosophy ، فردریک کاپلستون Frederick Copleston، جلد ۱، ترجمه جلال الدین مجتبوی.
۲) تاریخ فلسفه، فردریک کاپلستون، جلد ۸ ، ترجمه دکتر بهاء الدین خرمشاهی.
۳) فلاسفه بزرگ The Great Philosophers ، براین مگی Bryan Magee، ترجمه عزت الله فولادوند.
۴) مردان اندیشه Men of Ideas ، براین مگی، ترجمه عزت الله فولادوند.
۵) رساله منطقی- فلسفی Tractatus Logico-Philosophicus ، لودویگ ویتگنشتاین Ludwig Wittgenstein ، ترجمه دکترمیرشمس الدین ادیب سلطانی.
۶) نظریه مجموعه ها و کاربردهای آن Set Theory with Applications ، شووینگ تی. لین و یو- فنگ. لین Shwu Yeng T. Lin and You-Feng Lin ، ترجمه عمید رسولیان.
۷) توپولوژی عمومی، دکترکاظم للّهی.
۸) هندسه نااقلیدسی Non-Euclidean Geometry ، هارولد ا. ولف Harold E. Wolfe ، ترجمه احمد بیرشک.
۹) هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی Euclidean and Non-Euclidean Geometries ، ماروین جی گرینبرگ Marvin Jay Greenberg ، ترجمه م. ه . شفیعیها.
۱۰) آشنایی با توپولوژی و آنالیز نوین Introduction to Topology and Modern Analysis ، ج. ف. سیمونز G. F. Simmons ، ترجمه اسدالله نیکنام.
۱۱) نشر ریاضی، مجله ویژه نامه براوئر L. E. J. Brouwer ، سال ۹، شماره ۱، اسفند ۱۳۷۶، شماره پیاپی ۱۷.□